Repaso: La electrodinámica antes de Maxwell.

(1) $$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(2) $$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(3) $$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

(4) $$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Una inconsistencia en las ecuaciones.

Para cualquier campo vectorial, $\vec{C}$, vale $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) = 0$.

Esto debería ser cierto para $\vec{E}$ y para $\vec{B}$:

(5) $$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{B}) = 0 \quad \text{(por (3))}$$

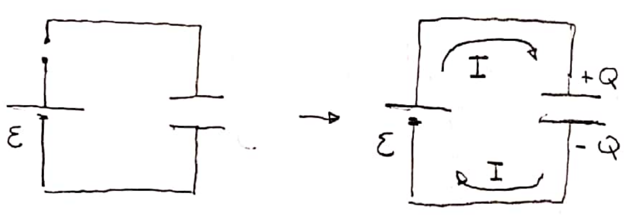
(el lado izquierdo de esta ecuación es cero porque $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = 0$ y el lado derecho es cero porque $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow 0 = 0$ y todos contentos).

Pero esto falla para el campo $\vec{B}$!

(6) $$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\mu_0 \vec{J}) = \mu_0 (\nabla \cdot \vec{J})$$

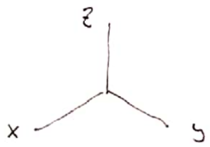
Para corrientes estacionarias, vale $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ y las ecs. (1-4) son consistentes con $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$. Pero en general, $\nabla \cdot \vec{J} \neq 0$

Esta inconsistencia en la ley de Ampére se manifiesta en situaciones concretas. Consideremos el proceso de carga de un capacitor. Podemos imaginar un capacitor C inicialmente



descargado que se conecta a una fem ε. Mientras el capacitor se carga, una corriente I se establece en el circuito llevado cargas a una placa y quitándolas de la otra...

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) = 0$$



$$\begin{cases} C = C_x \hat{x} + C_y \hat{y} + C_z \hat{z} \\ \nabla = \dfrac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \dfrac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \dfrac{\partial}{\partial z} \hat{z} = \partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{y} + \partial_z \hat{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{C} = (\partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{y} + \partial_z \hat{z}) \times (C_x \hat{x} + C_y \hat{y} + C_z \hat{z}) \\ \qquad = (\partial_y C_z - \partial_z C_y)\hat{x} + (\partial_z C_x - \partial_x C_z)\hat{y} + (\partial_x C_y - \partial_y C_x)\hat{z} \end{cases}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) = (\partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{y} + \partial_z \hat{z}) \cdot \left((\nabla \times \vec{C})_x \hat{x} + (\nabla \times \vec{C})_y \hat{y} + (\nabla \times \vec{C})_z \hat{z} \right)$$

$$= \partial_x (\nabla \times \vec{C})_x + \partial_y (\nabla \times \vec{C})_y + \partial_z (\nabla \times \vec{C})_z$$

$$= \partial_x (\partial_y C_z - \partial_z C_y) + \partial_y (\partial_z C_x - \partial_x C_z) + \partial_z (\partial_x C_y - \partial_y C_x)$$

$$= \underline{\partial_{xy} C_z} - \underline{\partial_{xz} C_y} + \underline{\partial_{yz} C_x} - \underline{\partial_{yx} C_z} + \underline{\partial_{zx} C_y} - \underline{\partial_{zy} C_x}$$

$$= 0 .$$

La forma integral de la Ley de Ampere nos dice que

(1) $$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

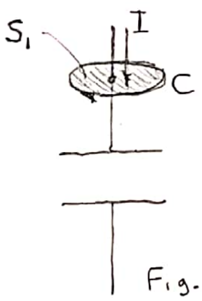


Fig. 225 A

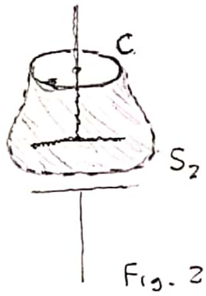


Fig. 225 B

Recordemos que en principio la ley de Ampère vale siempre (al menos en magnetostática). Puede ser complicado evaluar la integral si no hay simetrías, pero debería cumplirse (225.1).

La corriente encerrada I_{enc} que aparece en la ec. (225.1) es la corriente que atraviesa el lazo C, y puede calcularse como la integral de superficie de la densidad de corriente a traves de una superficie S que tenga por borde al lazo C ($C = \partial S$).

En el caso del capacitor cargándose, podemos aplicar la ec. (225.1) a un camino C alrededor del cable que lleva corriente a la placa del capacitor.

- Si consideramos una superficie S_1 como en el dibujo, la corriente que la atraviesa es I: $I_{enc} = I$.
- Pero si consideramos la superficie S_2, que también tiene como borde al camino C, encontramos que la integral de superficie de la densidad de corriente es cero! $I_{enc} = 0$ (!)

obs: en magnetostática no surge este problema porque las corrientes son estacionarias y no suceden acumulaciones de carga.
En el problema que estamos considerando, la carga se está acumulando en las placas del capacitor.
En esta situación en la que las corrientes no son estacionarias, deja de tener sentido el concepto de corriente encerrada por el lazo C, ya que esta depende de la superficie que elijamos para evaluarla!

nota: al momento del Trabajo de Maxwell, no había evidencia experimental de fallas en la ley de Ampére. Solo estas inconsistencias Teóricas.

Ley de Ampére-Maxwell

El problema lo Tenemos en la ec. (224.6):

(226.1) $$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \mu_0(\nabla\cdot\vec{J})$$

el lado derecho debería anularse, pero en general es no nulo!

Ahora, sabemos que si bien $\nabla\cdot\vec{J}=0$ para corrientes estacionarias, para corrientes variables Tenemos una relación más general en la forma de la ec. de continuidad (116.3)

(226.2) $$\nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

que expresa la conservación de la carga. Entonces, usando la ley de Gauss para reescribir ρ,

(226.3) $$\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}\right) = -\nabla\cdot\left(\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

Vemos que si combinamos esta cantidad $\varepsilon_0\partial_t\vec{E}$ con la densidad de corriente $\vec{J}$, recuperamos una densidad que Tiene divergencia nula y que "arregla" la ec. (226.1):

$$\nabla\cdot\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = 0 .$$

Maxwell propuso corregir la ley de Ampere:

(226.4) $$\boxed{\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$ ley de Ampére-Maxwell.

nota histórica: Maxwell pensaba que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ describían perturbaciones de un medio (el éter) y sus argumentos para motivar la ec. (226.4) Tenían más que ver con aspectos en el contexto de esa teoría. Hoy nos resulta más directa la motivación de la ec. de continuidad.

nota: la corrección de Maxwell "se les escapó" a los experimentales de la época porque es una contribución muy pequeña y difícil de detectar. La comprobación experimental de la teoría de Maxwell llegó con los experimentos de Hertz sobre radiación electromagnética. (en 1888).

Simetría

- un campo magnético variable induce un campo eléctrico (Faraday)
- un campo eléctrico variable induce un campo magnético (Maxwell)

Corriente de desplazamiento.

Maxwell introdujo el término corriente de desplazamiento para referirse a su corrección:

(227.1) $$\vec{J}_d \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Si bien el término $\varepsilon_0 \partial_t \vec{E}$ no es una corriente, tiene unidades de $[\vec{J}]$.

- Volvemos a la paradoja del capacitor cargándose para ver como la idea de Maxwell resuelve la situación.

Si suponemos que se trata de un capacitor de placas paralelas de area A a una distancia pequeña $d \ll \sqrt{A}$, el campo eléctrico puede calcularse (Gauss)

(227.2) $$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A}$$ para una carga Q

Mientras el capacitor se carga, la carga varía y por lo tanto también el campo eléctrico:

(227.3) $$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\cdot I \Rightarrow \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{I}{A}$$ (227.4)

La forma integral de la ec. (226.4) es:

(227.4) $$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$ (generalizando 225.1).

Cuando elegimos una superficie S_1 atravesada por el cable como en la Fig. 225A: $E = 0$ y $I_{enc} = I$.

Si elegimos la superficie S_2 de la Fig. 225B resulta

$I_{enc} = 0$, pero ahora

$$\varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \frac{I}{A} \int ds = I$$

De modo que obtenemos la misma respuesta en la ec. (227.4) independientemente de la superficie elegida, aunque la "corriente" en el primer caso es la corriente en el conductor y en el segundo es una corriente de desplazamiento causada por el campo eléctrico variable.

Ecuaciones de Maxwell.

(1) $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Gauss)

(2) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

(3) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Faraday)

(4) $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Ampère - Maxwell)

(5) $\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Las ecuaciones (1-4) determinan los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$; junto con condiciones de contorno, a partir de las cargas $\rho(\vec{r})$ y sus movimientos $\vec{J}(\vec{r})$.

La ec. (5) determina las fuerzas sobre las cargas debidas a los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

La ec. de continuidad está garantizada por las ecs. de Maxwell:

(6) $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$,

Como ya vimos y podemos verificar aplicando la divergencia a la ec. (4) y usando (1).

Como están escritas, las ecs. (1-4) proporcionan el rotor y la divergencia de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, que según el Teorema de Helmholtz define estos campos (a menos de condiciones de contorno).

Sin embargo, la física es un poco confusa porque pareciera que los campos $\vec{E}$ son producidos por cargas $\rho(\vec{r})$ y por campos magnéticos variables $\partial_t \vec{B}$. Analogamente, $\vec{B}$ es producido por cargas en movimiento $\vec{J}(\vec{r})$ y por campos eléctricos variable $\partial_t \vec{E}$. Esto puede criticarse porque, en definitiva, $\partial_t \vec{E}$ y $\partial_t \vec{B}$ también estan generados por cargas y corrientes.

Por eso resulta quizá más claro escribir las ecs. de Maxwell

$$(1) \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$(3) \quad \nabla \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$(4) \quad \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

Si bien son equivalentes, esta segunda forma de escribir las ecs. de Maxwell pone énfasis en que los campos electromagnéticos son originados por cargas y corrientes:

- los campos están del lado izq. de las ecs. (1-4)
- las fuentes del lado derecho

Ondas electromagnéticas en el espacio libre. (vacío)

En una región del espacio sin cargas ni corrientes

$\rho(\vec{r}) = 0$

$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{0}$

Las ecuaciones de Maxwell son

(229.1) $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ $\qquad \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (229.3)

(229.2) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ $\qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (229.4)

Estas ecuaciones diferenciales para $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están acopladas: $\vec{E}$ depende de $\vec{B}$ y viceversa.

Pueden desacoplarse tomando el rotor a (229.3) y (229.4):

en la p. 167' demostramos que para cualquier campo vectorial $\vec{F}$

(229.3) $$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

Para el campo eléctrico obtenemos:

(229.4) $$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B})$$

reemplazando (229.1) y (229.4) resulta

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \quad -\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

(229.5) $$\therefore \boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$ una ec. de ondas para $\vec{E}$!

Para el campo magnético

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \nabla \times \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad -\nabla^2 \vec{B} = \nabla \times \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

(229.6) $$\therefore \boxed{\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$ una ec. de ondas para $\vec{B}$!

Es decir, en el espacio libre las ecuaciones de Maxwell implican que las componentes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisfacen ecuaciones de onda

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

con una velocidad

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} . \quad (230.1)$$

Imagínense la sorpresa de Maxwell cuando calcula esta velocidad,

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \, 10^{-7} \; N/A^2 \\ \varepsilon_0 &= 8.85 \cdot 10^{-12} \; C^2/N m^2 \end{aligned}\right\} \text{ de mediciones electro magneto státicas}$$

$v = 2.99 \cdot 10^{8}$ m/s ... escalofrío.

Si, $(\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} = c$, la velocidad de la luz.

Con la verificación experimental de Hertz, esto termina por unificar la óptica a la electrodinámica!

Formulación potencial de la electrodinámica.

Las ecuaciones de Maxwell:

(1) $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (3) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(2) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (4) $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

En electromagnetostática tenemos:

(5) $\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla V$ (7)

(6) $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (8)

En electrodinámica sigue valiendo

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

con lo cual podemos introducir un potencial vector $\vec{A}$

(9) $\boxed{\nabla \times \vec{A} = \vec{B}.}$

Sin embargo ya no vale $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ y no podemos introducir un potencial escalar de la forma que lo hacemos en electrostática.

Pero usando (9) en (3) vemos que

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

(10) $\therefore \ \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$

Para el campo vectorial entre paréntesis, cuyo rotor es nulo, podemos introducir un potencial escalar $V(\vec{r})$:

(11) $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$

de manera que

(12) $\boxed{\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$