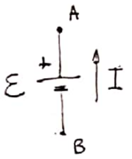
# Un breve repaso sobre elementos de circuitos.

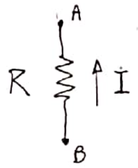



- Batería o fem:

$\Delta V = V_a - V_b = \varepsilon$

$P = I\,\varepsilon$ (potencia)

entrega energía

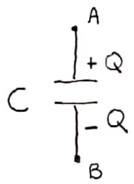



- Resistencia:

$V_a - V_b = \Delta V = R\,I \;(= R\,\dot{Q})$

$P = R\,I^2$

disipa energía

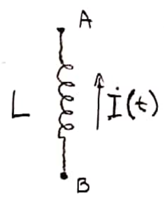



- Capacitor:

$V_a - V_b = \Delta V = \dfrac{Q}{C}$

$W = \dfrac{1}{2} Q V = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} = \dfrac{1}{2} C V^2$

almacena carga / energía en el campo $\vec{E}$




- Inductancia:

$V_a - V_b = \Delta V = -L\,\dfrac{dI}{dt} \;(= -L\,\ddot{Q})$

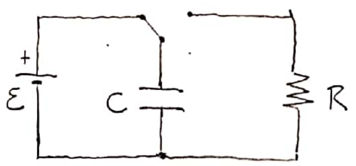
$W = \dfrac{1}{2} L I^2$

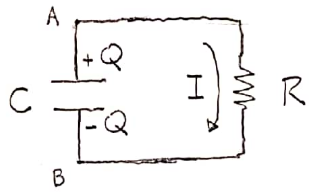
"almacena" corriente / energía en el campo $\vec{B}$

Scanned with CamScanner

# Transitorios – circuitos de corriente variable.

Hasta ahora habíamos considerado resistencias y capacitores en circuitos con corrientes estacionarias. Para ganar intuición, consideremos ahora un caso simple en el que las corrientes varían en el tiempo. Supongamos que se carga un capacitor, digamos empleando una batería, a un potencial determinado $\Delta V = V_0$.




Circuito RC.

$\mathcal{E} = V_0$.

La carga en el capacitor será:

$Q = CV \quad \therefore \quad Q(0) = C.V_0 \quad$ a $t = 0$

A continuación desconectamos la batería y conectamos el capacitor a un circuito que tiene una resistencia $R$.

Se va a establecer una corriente $I$ mientras el capacitor va perdiendo su carga.

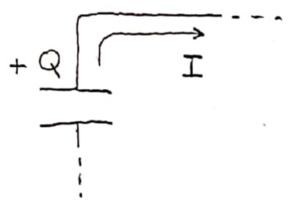
Llamemos $V$ a la diferencia de potencial entre las placas en un momento dado, es decir

$V_A - V_B = \Delta V \equiv V$

$\Rightarrow \quad Q = CV$

sumando las diferencias de potencial en una vuelta al circuito

$$\frac{Q}{C} - RI = 0$$




Además,

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -\dot{Q}$$

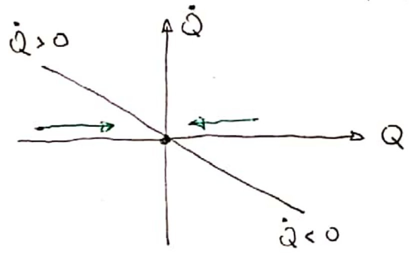
ya que si suponemos que la variable $Q$ describe la carga positiva en la placa de arriba, la corriente $I$ se está llevando carga de allí reduciendo el valor de $Q$.

Tenemos entonces:

(235.1) $\quad R I = \dfrac{Q}{C} \quad \wedge \quad I = -\dot{Q}$

(235.2) $\quad \boxed{\dot{Q} = -\dfrac{1}{RC} \cdot Q}$ una ecuación diferencial para la dinámica de Q.

- Antes de resolverla, podemos graficar $\dot{Q} = f(Q)$:




$Q = 0$ es un punto fijo: $\dot{Q} = 0$ allí

$\begin{cases} \text{para } Q > 0 \text{ tenemos } \dot{Q} < 0 \\ \quad " \quad Q < 0 \quad " \quad \dot{Q} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $Q = 0$ es un punto fijo estable.

La ec. (235.2) puede escribirse:

(235.3) $\quad \dfrac{dQ}{Q} = -\dfrac{1}{RC} \cdot dt$

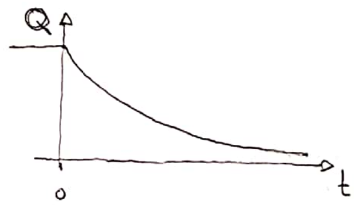
vemos que las unidades de la constante RC son unidades de tiempo: $[RC] = [t]$

Introducimos el tiempo característico $\tau_c \equiv RC$.

(235.4) $\quad \dfrac{dQ}{Q} = -\dfrac{dt}{\tau_c}$

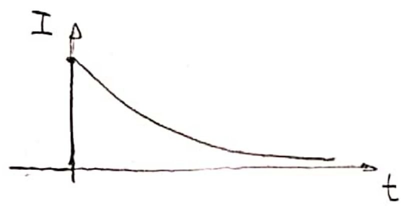
Integramos esta ecuación:

(235.5) $\quad \displaystyle\int_{Q_0}^{Q} \frac{dQ'}{Q'} = -\frac{1}{\tau_c} \int_0^t dt'$




$\ln Q - \ln Q_0 = -\dfrac{1}{\tau_c} \cdot t$

$\ln Q = \ln Q_0 - t/\tau_c$



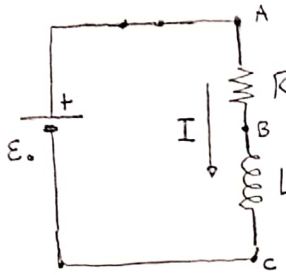

(235.6) $\quad \boxed{Q = Q_0 \cdot e^{-t/\tau_c}} \quad \{ Q_0 = C V_0 \}$

(235.7) $\quad \boxed{I = -\dot{Q} = \dfrac{Q_0}{\tau_c} \cdot e^{-t/\tau_c}} \quad \left\{ I_0 = \dfrac{Q_0}{\tau_c} = \dfrac{Q_0}{RC} = \dfrac{V_0}{R} \right\}$

La corriente inicial es $V_0/R$, y decae exponencialmente a medida que el capacitor va perdiendo su carga, también exponencialmente.

# Circuito RL.

Imaginemos que conectamos una fem $\mathcal{E}_0$ a una inductancia L.



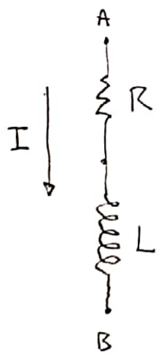


obs: Tanto la batería como la bobina de la inductancia, como los hilos del circuito, tendrán cierta resistencia. Representamos la suma como una resistencia R en serie. De igual modo, L incluye la inductancia (menor) del mismo circuito. Así, el circuito ideal de la figura es una buena representación del circuito físico.

Pensemos primero el problema cualitativamente. Al cerrar el interruptor, la fem, que establece una diferencia de potencial $\mathcal{E}_0$ entre los puntos A y C, va a establecer una corriente I. Al variar I, en la inductancia L aparece una fem que se opone a esta variación. La corriente por lo tanto crecerá gradualmente, hasta alcanzar un valor estacionario...?

Si sumamos las diferencias de potencial al recorrer el circuito

$$\mathcal{E}_0 - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$





- fíjense que la fem establece un potencial $V_A > V_B$, por lo que esperamos que la corriente circule en la dirección indicada
- al atravesar la resistencia de A a B en la dirección de la corriente propuesta, hay una caída de tensión
  $\Delta V_{AB} = -RI$
- al atravesar la inductancia L, si la corriente está aumentando ($\dot{I} > 0$) nos encontramos con una fem inducida que se opone, generando una caída
  $\mathcal{E}_L = \Delta V_{BC} = -L\dot{I}$

La ecuación diferencial para $I(t)$ es

(237.1) $$L\dot{I} + RI - \mathcal{E}_0 = 0$$

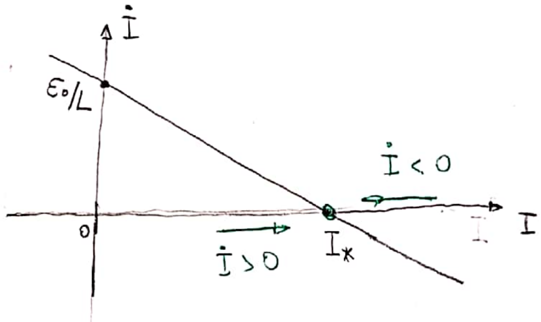
(237.2) $$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I + \frac{\mathcal{E}_0}{L}$$

Nuevamente encontramos una constante de tiempo

$$\left[\frac{L}{R}\right] = [t]$$

y podemos introducir un tiempo característico $\tau_L = L/R$ (237.3)

(237.4) $$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{\tau_L}I + \frac{\mathcal{E}_0}{L} \qquad \left. f(I) \equiv \frac{\mathcal{E}_0}{L} - \frac{I}{\tau_L} \right\}$$

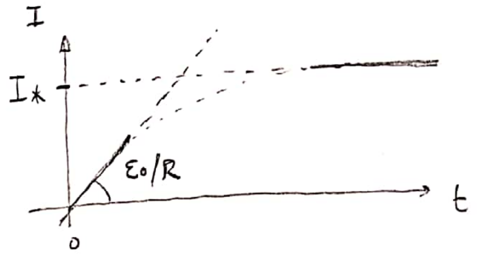



- para $I = 0$, $\dot{I} = \mathcal{E}_0/L$

esto nos dice la variación inicial de la corriente

- $f(I) \equiv 0$, $I = I_* = \mathcal{E}_0/R$

esto nos dice el valor estacionario de la corriente, $I_*$ es punto fijo estable.




Para integrar la ec. (237.4) una opción es introducir una variable

$$J \equiv \frac{\mathcal{E}_0}{L} - \frac{1}{\tau_L}I \equiv \dot{I}$$

$$\dot{J} = -\frac{1}{\tau_L}\dot{I} = -\frac{1}{\tau_L}\cdot J \quad \Rightarrow \quad J(t) = J_0 \cdot e^{-t/\tau_L} \qquad \text{con } J_0 = J(0) \overset{I(0)=0}{=} \frac{\mathcal{E}_0}{L}$$

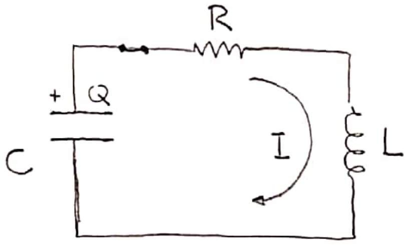
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\cdot\tau_L - \tau_L J = \frac{\mathcal{E}_0}{R} - \frac{L}{R}\cdot\frac{\mathcal{E}_0}{L}e^{-t/\tau_L}$$

(237.5) $$\boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\cdot\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right)} \quad \text{con } \tau_L = L/R$$

es decir que la corriente aumenta gradualmente desde cero, exponencialmente aproximandose a $I_* = \mathcal{E}_0/R$.

# Circuito RLC.

Supongamos ahora que tenemos un capacitor C inicialmente cargado con una carga $Q_0 = Q(0)$, en serie con una resistencia R y una inductancia L.




(238.1) $$\frac{Q}{C} - RI - L\dot{I} = 0$$

(238.2) $$I = -\frac{dQ}{dt} = -\dot{Q}$$

: si Q es la carga en la placa superior cuando Q decrece ($\dot{Q} < 0$) se produce una corriente ($I > 0$) en la dirección indicada.

$$\Rightarrow \dot{I} = -\ddot{Q}$$

(238.3) $$\boxed{L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0}$$ ec. diferencial para Q

(238.4) $$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC} \cdot Q = 0$$

Vemos su similitud con el oscilador armónico amortiguado que estudiamos en mecánica:

(238.5) $$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \underbrace{kx}_{} = 0$$

- $kx$ → elastico o resorte ($C^{-1}$)
- $\gamma\dot{x}$ → disipasión o rozamiento (R)
- $m\ddot{x}$ → Inercia / masa (L)

Proponemos una solución de la forma

$$(1) \quad Q = A\, e^{-\alpha t} \cos(\omega t) + B\, e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

$$(2) \left\{ Q(t) = e^{-\alpha t}\left(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)\right)\right.$$

$$\dot{Q} = -\alpha \,.\, e^{-\alpha t}\left(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)\right)$$

$$+ e^{-\alpha t}\left(-\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t)\right)$$

$$(3) \left\{ \dot{Q} = e^{-\alpha t}.\left((-\alpha A + \omega B)\cos(\omega t) + (-\alpha B - \omega A)\sin(\omega t)\right)\right.$$

$$\ddot{Q} = -\alpha\, e^{-\alpha t}\left((-\alpha A + \omega B)\cos(\omega t) + (-\alpha B - \omega A)\sin(\omega t)\right)$$

$$+ e^{-\alpha t}\left((-\alpha A + \omega B)(-)\omega \sin(\omega t) + (-\alpha B - \omega A).\omega.\cos(\omega t)\right)$$

$$= e^{-\alpha t}\left((\alpha^2 A - \alpha\omega B)\cos(\omega t) + (\alpha^2 B + \alpha\omega A)\sin(\omega t)\right.$$

$$\left. + (\alpha\omega A - \omega^2 B)\sin(\omega t) + (-\alpha\omega B - \omega^2 A)\cos(\omega t)\right)$$

$$\ddot{Q} = e^{-\alpha t}\left((\alpha^2 A - 2\alpha\omega B - \omega^2 A)\cos(\omega t)\right.$$

$$\left. + (\alpha^2 B + 2\alpha\omega A - \omega^2 B)\sin(\omega t)\right)$$

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \ddot{Q} = e^{-\alpha t}\Big(&\big((\alpha^2 - \omega^2)A - 2\alpha\omega B\big)\cos(\omega t) \\ &+ \big((\alpha^2 - \omega^2)B + 2\alpha\omega A\big)\sin(\omega t)\Big) \end{aligned}\right.$$

Reemplazando la solución en la ec. diferencial (238.4):

$$0 = \ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC} Q \qquad \text{con } (2, 3, 4) \ldots$$

$$(5) \quad 0 = e^{-\alpha t}\left\{\left[(\alpha^2 - \omega^2)A - 2\alpha\omega B\right]\cos(\omega t) + \left[(\alpha^2 - \omega^2)B + 2\alpha\omega A\right]\sin(\omega t)\right\}$$

$$+ \frac{R}{L} e^{-\alpha t}\left\{(-\alpha A + \omega B)\cos(\omega t) + (-\alpha B - \omega A)\sin(\omega t)\right\}$$

$$+ \frac{1}{LC} e^{-\alpha t}\left\{A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)\right\}$$

Podemos factorizar el $e^{-\alpha t}$,

y agrupar los terminos $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$:

$$(1) \quad 0 = e^{-\alpha t}\left\{\left[(\alpha^2-\omega^2)A - 2\alpha\omega B\right] + \frac{R}{L}\cdot(-\alpha A+\omega B) + \frac{1}{LC}\cdot A\right\}\cos(\omega t)$$

$$+ e^{-\alpha t}\left\{\left[(\alpha^2-\omega^2)B + 2\alpha\omega A\right] + \frac{R}{L}(-\alpha B-\omega A) + \frac{1}{LC}\cdot B\right\}\sin(\omega t)$$

Esta igualdad debe valer $\forall t$, en particular cuando

$\cos(\omega t) = 0$, $\sin(\omega t) = 1$ (y viceversa)

con lo que las llaves deben anularse por separado:

$$(2) \quad \left[(\alpha^2-\omega^2)A - 2\alpha\omega B\right] + \frac{R}{L}(-\alpha A+\omega B) + \frac{1}{LC}A = 0$$

$$(3) \quad \left[(\alpha^2-\omega^2)B + 2\alpha\omega A\right] + \frac{R}{L}(-\alpha B-\omega A) + \frac{1}{LC}\cdot B = 0$$

Reordenando los términos en A y B:

$$(4) \quad \left[(\alpha^2-\omega^2) - \alpha\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}\right]A + \left[-2\alpha\omega + \omega\frac{R}{L}\right]B = 0$$

$$(5) \quad \left[2\alpha\omega - \omega\frac{R}{L}\right]A + \left[(\alpha^2-\omega^2) - \alpha\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}\right]\cdot B = 0$$

$$\begin{bmatrix} M & N \\ -N & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considerando el caso particular $A=0$ (ó $B=0$)

obtenemos las dos condiciones

$$(6) \quad (\alpha^2-\omega^2) - \alpha\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$$

$$(7) \quad 2\alpha\omega - \omega\frac{R}{L} = 0$$

De esta ultima ec. despejamos la condición

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

y de la ec. (6)

$$\omega^2 = \alpha^2 - \alpha\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{1}{LC} = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4}\frac{R^2}{L^2}$$

En resumen:

(241.1) $$\alpha = \frac{R}{2L}$$

(241.2) $$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

en la solucion propuesta (239.2):

(241.3) $$Q(t) = e^{-\alpha t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$$

Para que exista una solución como la propuesta con $\omega \in \mathrm{Re}$ debe ser

(241.4) $$\omega^2 > 0 \quad : \quad \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} > 0$$

se trata del caso subamortiguado, o de amortiguamiento débil.

Fijense que en la expresión para la frecuencia aparece $\alpha$:

(241.5) $$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha^2 \qquad \text{con} \qquad \alpha = \frac{R}{2L}$$

En el caso particular $R = 0$ resulta:

(241.6)
$\alpha = 0$ (no hay amortiguamiento, no se disipa energía)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_0$$ que es una frecuencia natural del circuito LC.

[Hacer el plot en Mathematica]

En general entonces:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \qquad \text{con} \qquad \omega_0^2 = (LC)^{-1} \quad y \quad \alpha = R/2L$$

En estos términos, la condicion (241.4) nos dice

$$\omega^2 > 0 \Rightarrow \omega_0^2 > \alpha^2 \quad ó \quad \omega > \alpha. \quad ó \quad \boxed{\frac{\alpha}{\omega} < 1}$$

Es interesante escribir estas constantes en términos de los tiempos característicos que introdujimos antes.

$$\tau_L = \frac{L}{R} \quad \text{y} \quad \tau_C = RC$$

$$\frac{1}{\tau_L \tau_C} = \frac{R}{L} \cdot \frac{1}{RC} = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad , \text{ es decir } \omega_0^2 = \frac{1}{\tau_L \tau_C}$$

mientras que $\frac{R}{L} = \frac{1}{\tau_L}$

la condición para $\omega > 0$ queda entonces...

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} \Rightarrow \frac{1}{\tau_L \tau_C} > \frac{1}{4} \frac{1}{\tau_L^2} \quad ó \quad \left\{ \tau_L > \frac{1}{4} \tau_C \right\}$$

Por último volvamos brevemente a la ec. diferencial y su análoga mecánica:

$$\ddot{Q} + \underbrace{\frac{R}{L}}\dot{Q} + \underbrace{\frac{1}{LC}} Q = 0$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\gamma}{m}}_{\text{disipasion}} \dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\text{restitución}} x = 0$$

obs: en la solución general

$$Q(t) = e^{-\alpha t} \left( A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \right)$$

- las constantes $\alpha$ y $\omega$ están determinadas por las propiedades físicas del sistema (los parámetros $R, L$ y $C$).
- las constantes $A$ y $B$ están determinadas por las condiciones iniciales y reflejan de algún modo el origen temporal $(t=0)$.

Para determinar $A$ y $B$ hace falta especificar $Q(0)$ y $\dot{Q}(0)$.

Recordemos además que $I(t) = -\dot{Q}(t)$, y según (239.3)

$$I(t) = e^{-\alpha t} \left( (+\alpha A - \omega B) \cos(\omega t) + (+\alpha B + \omega A) \sin(\omega t) \right)$$

Supongamos por ejemplo que a $t=0$, $Q(0) = Q_0$, $I(0) = 0$.

como $\sin(0) = 0$ y $\cos(0) = 1$,

$Q(0) = Q_0 = A$

$I(0) = 0 = \alpha A - \omega B \rightarrow \omega B = \alpha A \quad \therefore \quad B = \frac{\alpha}{\omega} Q_0$

- para el caso $\alpha = 0$ Tenemos $B = 0$, y resulta

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$$

$$I = \omega Q_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

es decir la corriente resulta desfasada en $\pi/2$

- en general no es así, sin embargo, y $\alpha$ introduce un cambio en este desfasaje. Para ilustrarlo podemos imaginar condiciones iniciales que hagan $B = 0$:

$$Q(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$$

$$I(t) = \omega A e^{-\alpha t} \left( \sin(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} \cos(\omega t) \right)$$

Caso sobreamortiguado:

cuando no se cumple la condición (241-4) la solución de la ec. (238-4) Toma una forma diferente:

$$\begin{cases} Q(t) = A e^{-\beta t} \\ \dot{Q} = -\beta A e^{-\beta t} = -\beta Q \\ \ddot{Q} = \beta^2 A e^{-\beta t} = \beta^2 Q \end{cases}$$

reemplazando en la ec. dif.

$$\beta^2 Q + \frac{R}{L}(-)\beta Q + \frac{1}{LC} \cdot Q = 0$$

$$\beta^2 - \frac{R}{L}\beta + \frac{1}{LC} = 0 \quad \text{ec. característica}$$

$$\beta_\pm = \frac{R/L \pm \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2}$$

La forma general de la solución es

$$Q(t) = A e^{-\beta_+ t} + B e^{-\beta_- t}$$