Circuitos de corriente alterna

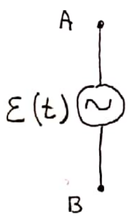
- La clase pasada vimos como se comportan los circuitos de corriente cuando hay algún cambio. Vimos que suceden comportamientos transitorios que tienen forma exponencial de acercarse a un nuevo estado estacionario:
  - la descarga de un capacitor 

  - generar una corriente en una inductancia 

  - oscilaciones amortiguadas en un RLC 

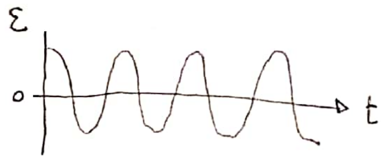
- Hoy vamos a estudiar el comportamiento de circuitos conectados a fuentes de corriente alterna, en las que la fem varía con el tiempo de manera regular.

obs: nos vamos a centrar en los comportamientos estacionarios, luego de que los transitorios decaen.



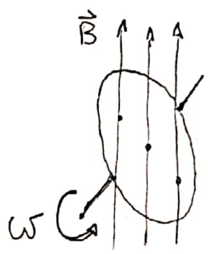
Fuente de fem alterna $\mathcal{E}(t)$

$$V_A - V_B = \Delta V_{AB} = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$



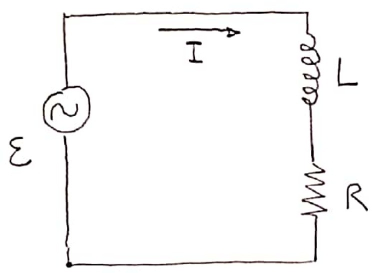
- generan una fem variable en el tiempo, oscilando sinusoidalmente, con amplitud constante $\mathcal{E}_0$

obs. muchos generadores basados en el principio de inducción dan lugar a este tipo de fem, por ejemplo cualquier generador formado por bobinas/espiras en movimiento de rotación en un campo magnético $\vec{B}$: dynamo de la bici, turbinas en una central hidroeléctrica...



obs. la elección de un coseno para $\mathcal{E}(t)$ es sin pérdida de generalidad. Cualquier fem que genere una variación periodica $\mathcal{E}(t)$ puede desarrollarse en serie de Fourier, por lo que es relevante estudiar $\mathcal{E}(t) \sim \cos(\omega t)$.

Circuito RL con fuente alterna:



con $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ (245.1)

Sumando las diferencias de potencial a lo largo de una vuelta:

(245.2) $$\mathcal{E}_0 \cos(\omega t) - L\frac{dI}{dt} - RI = 0$$

que podemos escribir como

(245.3) $$L\frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

obs: fijense la similitud con un sistema mecanico forzado

(245.4) $$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = F(t)$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} = \mathcal{E}(t)$$

obs: como vimos la clase pasada, en un circuito LR puede ocurrir un comportamiento transitorio cuando hay algun cambio (por ejemplo abrimos/cerramos alguna llave que conecta/desconecta una fem o parte del circuito). Estos transitorios decaen exponencialmente y nos interesa el estado estacionario que perdura luego de que el circuito "olvida" la perturbación.

ansatz: con un forzamiento periódico $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ proponemos como solución estacionaria una corriente que oscila con la misma frecuencia que la fuente:

(245.5) $$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

En esta solución propuesta, hay dos constantes a determinar. Para comprobar si es efectivamente una solución vamos a pedirle que satisfaga la ec. diferencial (245.3).

La derivada de $I(t)$ es

(246.1) $$\dot{I}(t) = -\omega I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Reemplazamos en (245.3):

(246.2) $$-\omega L I_0 \sin(\omega t + \varphi) + R I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

Escribimos los senos y cosenos usando:

(246.3) $$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

(246.4) $$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

(246.5) $$\Rightarrow -\omega L I_0 \left(\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi \right) + \\ + R I_0 \left(\cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi \right) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

Agrupamos los términos con factores $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$:

(246.6) $$(-\omega L I_0 \cos\varphi - R I_0 \sin\varphi)\sin(\omega t) + \\ + (-\omega L I_0 \sin\varphi + R I_0 \cos\varphi - \mathcal{E}_0)\cos(\omega t) = 0.$$

Esta igualdad debe valer $\forall t$, en particular cuando se anula el $\cos(\omega t)$ o el $\sin(\omega t)$, con lo que los coeficientes deben ser cero por separado: (multiplicando por (-1) y factorizando I_0)

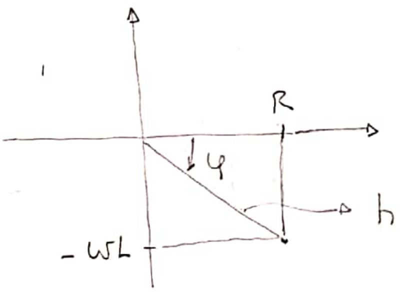
(246.7) $$I_0(\omega L \cos\varphi + R\sin\varphi) = 0$$

(246.8) $$I_0(\omega L \sin\varphi - R\cos\varphi) + \mathcal{E}_0 = 0$$

obs. Estas dos ecuaciones nos ponen condiciones sobre I_0 y φ. Si conseguimos escribir estas constantes de manera consistente en función de los parámetros del problema, tendremos que (245.5) es la solución que buscamos.

De la ec. (246.7) obtenemos: (la sol. $I_0 = \mathcal{E}_0 = 0$ es Trivial)

(247.1) $$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega L}{R}}$$



y de la ec. (246.8)

(242.2) $$I_0 = \frac{-\mathcal{E}_0}{\omega L \sin\varphi - R\cos\varphi}$$

usamos (247.1) para reescribir el denominador

$$\omega L \sin\varphi - R\cos\varphi = +R\left(\frac{\omega L}{R}\sin\varphi - \cos\varphi\right) = R\left(-\operatorname{tg}\varphi \sin\varphi - \cos\varphi\right)$$

$$= -R\left(\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} + \cos\varphi\right) = -\frac{R}{\cos\varphi}\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = -\frac{R}{\cos\varphi}$$

Luego,

(247.3) $$\boxed{I_0 = \frac{\mathcal{E}_0 \cos\varphi}{R}}$$

Pensando la ec. (247.1) gráficamente como en el diagrama vemos que $h^2 = R^2 + (\omega L)^2$ y $h\cos\varphi = R$

$$\cos\varphi = \frac{R}{h}$$

(247.4) $$\boxed{I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}}$$

Las relaciones (247.1) y (247.4) determinan las constantes I_0, φ en función de los parámetros de la ec. diferencial: $L, R, \omega, \mathcal{E}_0$ concluimos que:

(247.5) $$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

es la solución estacionaria que buscamos. Vamos a examinar esta solución para entender como se comporta la corriente.

- Primero que nada, la ec. (247-5) describe una oscilación con una amplitud constante I_0, y una frecuencia ω igual a la de la fem $\mathcal{E}(t)$.
- La amplitud I_0 es proporcional a $\mathcal{E}_0$, pero está modulada tanto por la resistencia como por la inductancia:
- Fíjense en la cantidad ωL, que tiene unidades de resistencia $[\omega L] = [R]$ y que parece jugar un papel análogo al de una resistencia en lo que respecta a la amplitud de la corriente.

def. Se llama <u>reactancia inductiva</u>: $X_L \equiv \omega L$.

- Entonces: a mayor resistencia R, menor amplitud de corriente (esto tiene sentido, no?), pero además: a mayor reactancia inductiva X_L, menor amplitud de corriente I_0. Esto es nuevo!
- En particular es interesante que $X_L = \omega L$ depende de la frecuencia ω de la fem. A mayor frecuencia, mayor es la reactancia y menor es la corriente I_0.
- Aun en ausencia de una resistencia ($R=0$) tenemos:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L}$$

- Para muy altas frecuencias $\omega \to \infty$ resulta $I_0 \to 0$!

Es decir que la inductancia funciona como un muro para las altas frecuencias: no las deja pasar!

Esto tiene sentido: a la inductancia "no le gusta" que le cambien la corriente, y una fem con una frecuencia muy alta está pretendiendo generar cambios muy rápidos, cosa que a la inductancia "no le gusta nada"!

- OJO. si bien en lo que respecta a I_0 la reactancia juega un papel similar a una resistencia, en L <u>no se disipa energía</u>.

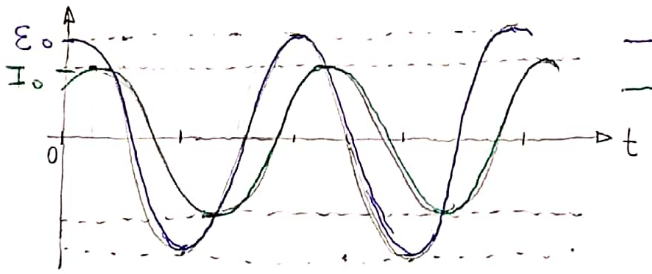
Scanned with CamScanner

. la corriente $I(t)$ no oscila en simultáneo con $\mathcal{E}(t)$ debido al desfasaje φ:

(249.1) $$I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

(249.2) $$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L}{R}$$

. como todos los parámetros son positivos ($\omega, L, R > 0$) el ángulo φ es negativo. Entonces la corriente atrasa con respecto a la oscilación $\mathcal{E}(t)$:



los picos de corriente llegan atrasados, luego de los picos de $\mathcal{E}(t)$.

. Transitorios: la solución

(249.3) $$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{con} \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L}{R}, \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

es lo que llamamos una solución particular de la ec. diferencial

$$L\dot{I} + RI = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t).$$

Una solución general de esta ec. incluye un término adicional dado por la sol. de la ec. homogénea, en este caso:

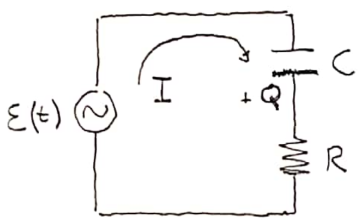
$$L\dot{I} + RI = 0.$$

La clase pasada vimos que esta ec. tiene como solucion una exponencial decreciente

$$I_h(t) \sim e^{-t/\tau_L}$$ donde $\tau_L = L/R$ es un tiempo característico.

Para condiciones iniciales arbitrarias, observaremos primero un transitorio que decae exponencialmente, y para $t \gg \tau_L$ éste término se vuelve despreciable y queda la solución estacionaria (249.3) que hemos estudiado. El circuito "olvida" la condición inicial luego de un tiempo τ_L.

Circuito RC con fuente alterna:



$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

- sup. Q es la carga en la placa de abajo y la corriente circula en sentido horario

$\Rightarrow \quad I = -\dot{Q}$

(250.1) $$\mathcal{E}_0 \cos(\omega t) + \frac{Q}{C} - RI = 0$$

(250.2) $$R\dot{Q} + \frac{1}{C} Q = -\mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

Proponemos la solucion:

(250.3) $$Q(t) = Q_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

(250.4) $$I(t) = -\dot{Q} = -\omega Q_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

definimos $I_0 \equiv -\omega Q_0$ de modo que

(250.5) $$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

(250.6) $$Q(t) = -\frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$$

reemplazamos el ansatz en la ec. diferencial

(250.7) $$RI - \frac{1}{C} Q = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

(250.8) $$RI_0 \cos(\omega t + \varphi) - \frac{1}{C}(-)\frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad RI_0 \left(\cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi \right)$$

(250.9) $$+ \frac{I_0}{\omega C} \left(\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi \right) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

Agrupando los $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$,

$$\left(RI_0 \cos\varphi + \frac{I_0}{\omega C} \cdot \sin\varphi - \mathcal{E}_0 \right) \cos(\omega t) +$$

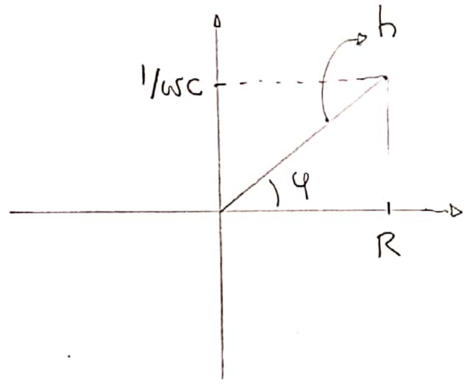
(250.10)

$$+ \left(-RI_0 \sin\varphi + \frac{I_0}{\omega C} \cos\varphi \right) \sin(\omega t) = 0.$$

Los coeficientes de $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$ deben ser cero:

(251.1) $$I_0 \left(R \sin\varphi - \frac{1}{\omega C} \cos\varphi \right) = 0 .$$

(251.2) $$I_0 \left(R \cos\varphi + \frac{1}{\omega C} \sin\varphi \right) - \mathcal{E}_0 = 0 .$$



De la primera ec. obtenemos

(251.3) $$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{R\omega C}}$$

y de la segunda,

(251.4) $$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R\cos\varphi + \frac{1}{\omega C}\sin\varphi}$$

donde podemos reescribir el denominador

(251.5) $$R\cos\varphi + \frac{1}{\omega C}\sin\varphi = R\left(\cos\varphi + \frac{1}{R\omega C}\cdot\sin\varphi\right) =$$

$$= R\left(\cos\varphi + \operatorname{tg}\varphi \sin\varphi\right) = R\left(\cos\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right) = \frac{R}{\cos\varphi}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)$$

$$= \frac{R}{\cos\varphi} .$$

(251.6) $$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0 \cos\varphi}{R}$$

gráficamente, $h^2 = R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}$ y $h\cos\varphi = R \therefore \frac{\cos\varphi}{R} = \frac{1}{h}$

(251.7) $$\boxed{I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}}$$

Las ecuaciones (251.3) y (251.7) definen las constantes I_0 y φ en función de los parámetros $R, C, \omega, \mathcal{E}_0$.

- Comparemos la soluciones (250.5) y (249.3):

$$I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

son la misma! ... pero I_0 y φ son diferentes.

Vemos que hay dos diferencias clave:

- Primero, la corriente I_0 está modulada por la <u>reactancia</u>

def. <u>capacitiva</u> $X_c \equiv (\omega C)^{-1}$.

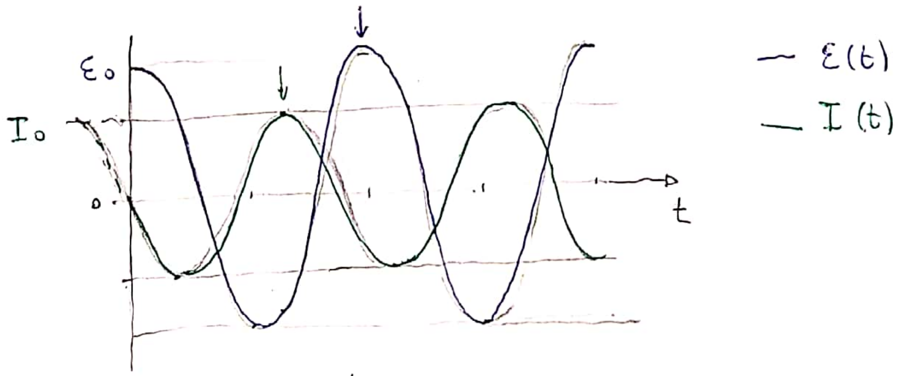
- Para altas frecuencias, $\omega \to \infty$, la modulación $\frac{1}{\omega C} \to 0$ se anula. Es decir que el capacitor "no se ve" a altas frecuencias.

- El efecto de la reactancia capacitiva sobre la amplitud de la corriente se vuelve importante a bajas frecuencias. En particular para $\omega = 0$, $X_c \to \infty$ con lo que $I_0 = 0$. Es decir, el capacitor funciona como un muro para las corrientes estacionarias ($\omega = 0$): no las deja pasar.

- La otra diferencia clave entre C y L es que para el capacitor resulta

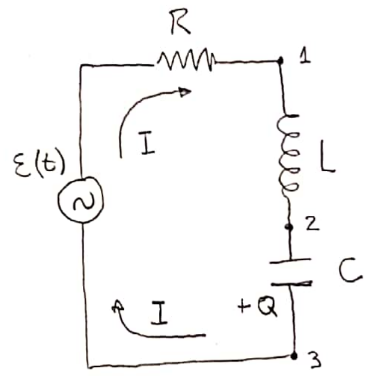
$$\operatorname{Tg} \varphi > 0 \quad \therefore \varphi \text{ positivo.}$$

Es decir que la corriente en el capacitor <u>adelanta</u> con respecto al forzamiento de $\mathcal{E}(t)$.



rec. El capacitor actua ($1/C$) como una fuerza restitutiva (como el resorte en la analogía mecánica), "tirando" de la corriente.

Circuito RLC con fuente alterna.



$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

con $I = -\dot{Q}$

Podríamos resolver este problema como hicimos los otros. Sin embargo vamos a aprovechar los resultados previos y usaremos un truco para hallar la solución.

Vamos a suponer que hay una corriente

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

circulando a través de L y C.

La diferencia de potencial entre los puntos 1 y 3 es

$$\Delta V_{13} = V_3 - V_1 = (V_3 - V_2) + (V_2 - V_1) = \Delta V_C + \Delta V_L$$

donde

$$\Delta V_L = -L \frac{dI}{dt} = +\omega L I_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \}$$

$$\Delta V_C = \frac{1}{C} Q = \frac{1}{C} \cdot (-) \int I \, dt = -\frac{1}{C} \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \Delta V_C = -\frac{1}{\omega C} I_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \}$$

Luego la diferencia de potencial en la combinación LC es

$$\Delta V = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \cdot I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Esta ecuación relaciona la diferencia de potencial con la corriente a través de LC.

Vemos que para una frecuencia ω determinada, sería equivalente reemplazar LC por un capacitor C' o una inductancia L', dependiendo del signo de $\omega L - 1/\omega C$.

Por ejemplo si $\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$ podemos reemplazar la combinación por una inductancia L' tal que

(254.1) $$\omega L' = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

Con la equivalencia, la diferencia de potencial en L' para la corriente dada a frecuencia ω es la misma que para LC.

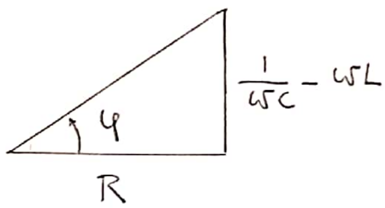
Entonces, para la combinación RLC de la página (253), podemos escribir la solución conocida para el circuito RL', ecs. (247.1) y (247.4), con la sustitución (254.1):

(254.2) $$\boxed{I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)}$$

con las constantes dadas por:

(254.3) $$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)}$$

(254.4) $$\boxed{I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$



Resonancia.

En el denominador de la amplitud de corriente $I_0(\omega)$ aparece la cantidad $\omega L - 1/\omega C$. Para el valor de ω que anula está cantidad, la corriente es máxima:

$$I_0 = I_{0max} \equiv \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

cuando

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \text{es decir, cuando} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

Fíjense que esta es la frecuencia natural del circuito LC sin forzar, ec. (241.7):

$$\omega_0^2 \equiv (LC)^{-1}.$$

Luego, para $\omega = \omega_0$ tenemos $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$.

Además en este caso:

$\text{tg}\,\varphi = 0$ con lo que $\varphi = 0$

y la corriente es:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(\omega t)$$

es como si solo estuviera la resistencia.

def. ω_0 se llama frecuencia de resonancia: $\omega_0^2 \equiv (LC)^{-1}$

- Si la frecuencia de la fem $\mathcal{E}(t)$ coincide con ω_0, la amplitud de la corriente es máxima y no se defasa con respecto a $\mathcal{E}(t)$. Es como si $\mathcal{E}(t)$ "no viera" las componentes LC.
- La frecuencia ω puede ser, por supuesto, distinta de ω_0. En este caso $I_0 < I_{0max} = \mathcal{E}_0/R$.

En particular, en los límites de muy baja o muy alta frecuencia, $I_0 \to 0$:
La modulación de $I_0(\omega)$ es una combinación de los efectos del capacitor y la inductancia.

En función de la frecuencia de resonancia ω_0,

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{L}{\omega} \cdot \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right) = \frac{L}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)$$

$$\text{tg}\,\varphi = -\frac{L}{R\omega}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)$$

$$I_0 = \mathcal{E}_0 \left(R^2 + (L/\omega)^2 \cdot (\omega^2 - \omega_0^2)^2\right)^{-1/2}$$

NOTA: factor de mérito ó quality factor.