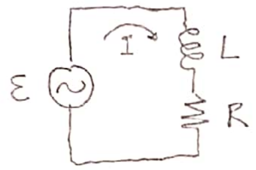
Repaso: circuitos con corriente alterna.

RL.



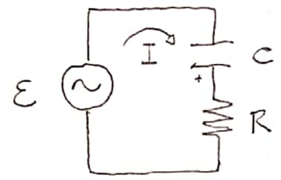
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

con $I_0 = \dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ y $\operatorname{tg}\varphi = -\omega L/R$

RC



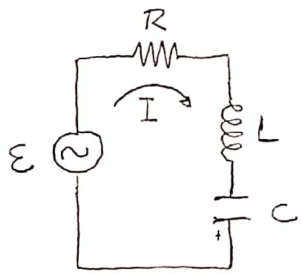
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

$$-RI - Q/C = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

con $I_0 = \dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}$ y $\operatorname{tg}\varphi = 1/R\omega C$

RLC



$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI - \frac{1}{C}Q = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

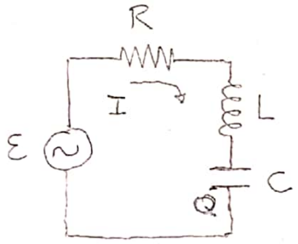
$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

con $I_0 = \dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

y $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{1}{R}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$

Formalismo complejo. (para circuitos CA)

Vamos a replantear el problema del circuito RLC que ya resolvimos para presentar una estrategia muy útil para resolver problemas de corriente alterna lineales.



$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

$$L \frac{dI}{dt} + RI - \frac{1}{C} Q = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \qquad (257.1)$$

$$I = -\frac{dQ}{dt} \quad \rightarrow \quad Q = -\int I\, dt \qquad (257.2)$$

La ecuación diferencial (257.1) está definida en los reales.
La extendemos al plano complejo, sustituyendo:

(257.3) $$\cos(\omega t) \longrightarrow e^{i\omega t}$$

Con esta extensión, la solución será también un complejo:

(257.4) $$I(t) \longrightarrow \tilde{I}(t) \quad \text{y} \quad Q(t) \longrightarrow \tilde{Q}(t) \qquad (\text{la tilde denota } \mathbb{C})$$

con lo que la ec. diferencial en el plano complejo es

(257.5) $$L \frac{d\tilde{I}}{dt} + R\tilde{I} - \frac{1}{C}\tilde{Q} = \mathcal{E}_0\, e^{i\omega t}$$

Fíjense que si $\tilde{I}(t)$ es una solución compleja a esta ecuación, entonces su parte real será solución de la ec. real (257.1).
Para verlo, tomamos la parte real de la ec. (257.5):

$$\mathbb{R}e\left[L \frac{d\tilde{I}}{dt} + R\tilde{I} - \frac{1}{C}\tilde{Q}\right] = \mathbb{R}e\left[\mathcal{E}_0\, e^{i\omega t}\right] = \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\omega t)$$

donde recordamos que $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$.

Además, la parte real de una derivada es la derivada de la parte real, y tenemos

(257.6) $$L \frac{d}{dt} \mathbb{R}e[\tilde{I}(t)] + R \cdot \mathbb{R}e[\tilde{I}(t)] - \frac{1}{C} \mathbb{R}e[\tilde{Q}(t)] = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

Es decir, $\mathbb{R}e[\tilde{I}]$ es solución de (257.1).

<u>obs</u>: en esta identidad es clave la linealidad de la ec. diferencial.

Proponemos una solución para la ec. (257.5) de la forma

(258.1) $$\tilde{I}(t) = \tilde{I}\, e^{i\omega t}$$

de modo que

(258.2) $$\tilde{Q}(t) = -\int \tilde{I}(t)\, dt = -\tilde{I} \int e^{i\omega t}\, dt = -\frac{1}{i\omega}\tilde{I}\, e^{i\omega t} = -\frac{1}{i\omega}\tilde{I}(t)$$

Reemplazando la solución en la ec. diferencial,

(258.3) $$L(i\omega).\tilde{I}\, e^{i\omega t} + R\tilde{I}\, e^{i\omega t} + \frac{1}{C}\frac{1}{i\omega}\tilde{I}\, e^{i\omega t} = \varepsilon_0\, e^{i\omega t}$$

Acá vemos la gran virtud de este método, ya que la dependencia temporal $e^{i\omega t}$ es la misma en todos los términos y la podemos cancelar:

(258.4) $$i\omega L\tilde{I} + R\tilde{I} + \frac{1}{i\omega C}\tilde{I} = \varepsilon_0$$

(258.5) $$\tilde{I} = \frac{\varepsilon_0}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}}$$

Recordemos brevemente algunas relaciones de los números complejos

(258.6) • $\frac{1}{i} = i^{-1} = -i$; $i^2 = -1$.

• si $w = a + ib \in \mathbb{C}$, $\bar{w} = a - ib$

(258.7) $$w\bar{w} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + iab - iab + b^2 = a^2 + b^2 = |w|$$

Con estas relaciones podemos reescribir la expresión para $\tilde{I}$

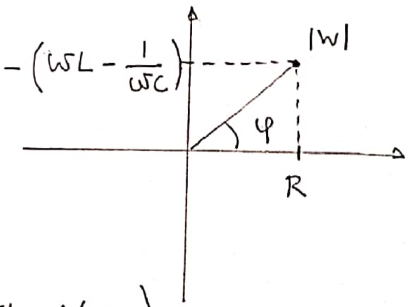
(258.8) $$\tilde{I} = \frac{\varepsilon_0}{R + i(\omega L - 1/\omega C)} = \varepsilon_0 \frac{R - i(\omega L - 1/\omega C)}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

El número complejo que aparece en el denominador

$$w = R - i(\omega L - 1/\omega C)$$

se puede reescribir en forma polar

$$w = |w|\, e^{i\varphi}$$, con



$$|w| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad y \quad tg\, \varphi = -\frac{1}{R}(\omega L - 1/\omega C)$$

Reescribimos la ec. (258.8):

(259.1) $$\tilde{I} = \frac{\mathcal{E}_0 W}{|W|^2} = \frac{\mathcal{E}_0}{|W|} \cdot e^{i\varphi}$$

Es decir,

(259.2) $$\tilde{I} = I_0\, e^{i\varphi} \quad , \text{con} \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{R}(\omega L - 1/\omega C)$$

La solución con su dependencia temporal es

(259.3) $$\tilde{I}(t) = \tilde{I}\, e^{i\omega t} = I_0 \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}$$

y la solución real, la corriente que circula por el circuito, la obtenemos como la parte real de esta solución compleja,

(259.4) $$I(t) = \mathbb{R}e[\tilde{I}(t)] = I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

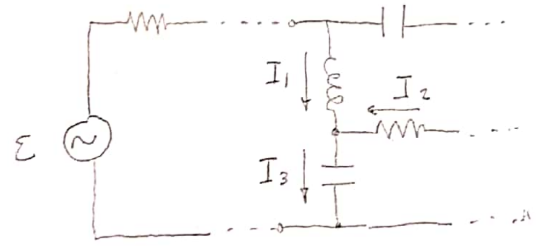
es decir, obtenemos la solución conocida de la p. 256, donde I_0 es la amplitud de la corriente y φ la fase relativa al voltaje aplicado.

Obs: cuando revisan los pasos que nos llevan al resultado (259.2), pueden ver las ventajas de este método. La dependencia temporal sale limpia en la ec. (258.3), mientras que en el método anterior debimos derivar senos y cosenos que van intercambiándose, agruparlos, pedir que se anulen por separado las dependencias con $\sin(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$.

En el método complejo todo se reduce a unas pocas manipulaciones algebraicas.

Vamos a generalizar este método para poder usarlo también en circuitos más complicados, con más de una malla.

Método de corrientes complejas para redes de CA.



Consideramos un circuito formado por resistencias, capacitores e inductancias, forzado a una frecuencia única y constante ω por una o más fems. En cada rama circula una corriente $I_j(t)$.
Las corrientes en cada rama pueden escribirse

$$I_j(t) = I_{0j} \cos(\omega t + \varphi_j)$$

La diferencia de potencial a través de cada rama:

$$V_j(t) = V_{0j} \cos(\omega t + \theta_j).$$

Buscamos calcular todas las corrientes $I_j(t)$ y tensiones $V_j(t)$ en el circuito.

Una posibilidad es escribir y resolver todas las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica en cada rama o malla.
Si nos interesa estudiar el comportamiento transitorio, es posible que tengamos que hacer esto.
En el estado estacionario con una frecuencia ω, podemos extender el formalismo complejo:

- Representamos las corrientes y tensiones mediante números complejos, con la siguiente convención

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow I_0 e^{i\varphi} = \tilde{I} \in \mathbb{C}$$

Para obtener la dependencia temporal, multiplicamos por $e^{i\omega t}$: $\tilde{I} . e^{i\omega t} = I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$

de modo que la corriente real se recupera tomando la parte real de $\tilde{I} e^{i\omega t}$:

$$I(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{I} e^{i\omega t}\right]$$

• Prop. la representación compleja de la suma de dos corrientes físicas es la suma de los representaciones complejas de cada corriente física por separado.

Consideramos las corrientes físicas y sus representaciones en $\mathbb{C}$

$$I_1(t) = I_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) \longrightarrow \tilde{I}_1 = I_{01} . e^{i\varphi_1}$$

$$I_2(t) = I_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) \longrightarrow \tilde{I}_2 = I_{02} . e^{i\varphi_2}$$

La suma de las representaciones es el numero complejo

$$\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 = I_{01} e^{i\varphi_1} + I_{02} e^{i\varphi_2}$$

Multiplicando por $e^{i\omega t}$ tenemos la dependencia temporal

$$(\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2) e^{i\omega t} = (I_{01} e^{i\varphi_1} + I_{02} e^{i\varphi_2}) . e^{i\omega t} = I_{01} e^{i(\omega t + \varphi_1)} + I_{02} e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

Tomando la parte real,

$$\mathbb{R}e\left[(\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2) e^{i\omega t}\right] = \mathbb{R}e\left[I_{01} e^{i(\omega t + \varphi_1)} + I_{02} e^{i(\omega t + \varphi_2)}\right]$$

$$= \mathbb{R}e\left[I_{01} e^{i(\omega t + \varphi_1)}\right] + \mathbb{R}e\left[I_{02} e^{i(\omega t + \varphi_2)}\right]$$

$$= I_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) + I_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) = I_1(t) + I_2(t)$$

• en el ultimo paso usamos $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

Tenemos entonces

$$\mathbb{R}e\left[(\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2) e^{i\omega t}\right] = I_1(t) + I_2(t)$$

con lo que queda demostrado el enunciado de la proposición: la suma de las representaciones representa la suma de las corrientes físicas.

NOTA: la misma cuenta puede hacerse en pasando a senos y cosenos; escribimos primero la suma de las representaciones complejas;

$$\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 = I_{01} e^{i\varphi_1} + I_{02} e^{i\varphi_2}$$

$$= I_{01} (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) + I_{02} (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

Agregamos la dependencia temporal multiplicando por
$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$

$$(\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2) \cdot e^{i\omega t} = \left[I_{01} (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) + I_{02} (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) \right] \times$$
$$\times \left[\cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \right]$$

$$= \left[(I_{01} \cos\varphi_1 + I_{02} \cos\varphi_2) + i (I_{01} \sin\varphi_1 + I_{02} \sin\varphi_2) \right] \times$$
$$\times \left[\cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \right]$$

$$= \Big[(I_{01} \cos\varphi_1 + I_{02} \cos\varphi_2) \cdot \cos(\omega t)$$
$$- (I_{01} \sin\varphi_1 + I_{02} \sin\varphi_2) \sin(\omega t) \Big] + i \left[\dots \right]$$

Nos interesa la parte real de ésta expresión,

$$\mathbb{R}e \left[(\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2) e^{i\omega t} \right] = (I_{01} \cos\varphi_1 + I_{02} \cos\varphi_2) \cos(\omega t) - (I_{01} \sin\varphi_1 + I_{02} \sin\varphi_2) \sin(\omega t)$$
$$= I_{01} (\cos\varphi_1 \cos(\omega t) - \sin\varphi_1 \sin(\omega t)) + I_{02} (\cos\varphi_2 \cos(\omega t) - \sin\varphi_2 \sin(\omega t))$$
$$= I_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) + I_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) = I_1(t) + I_2(t)$$

Es decir:

$$\mathbb{R}e \left[(\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2) e^{i\omega t} \right] = I_1(t) + I_2(t)$$

$\Rightarrow$ • Entonces vale la proposición y podemos usar el formalismo complejo para sumar corrientes.

• De igual modo, podemos sumar voltajes en su representación compleja.

• Esto constituye una gran ventaja para aplicar las leyes de Kirchoff al circuito. En vez de sumar funciones periódicas del tiempo, nos basta con sumar o restar números complejos.

En un nodo donde convergen tres hilos conductores, por ejemplo, para cada instante de tiempo vale

$$I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) = 0$$

En la representación compleja esta toma la forma simple de una suma algebraica de tres números en $\mathbb{C}$.

Lo mismo vale para calcular la suma de diferencias de potencial. En una malla (un camino cerrado) esta suma debe anularse para todo t:

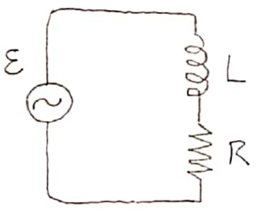
(263.1) $$V_1(t) + V_2(t) + \dots + V_n(t) = 0$$

pero en la representación compleja esta ec. se reduce a una ec. algebraica en $\mathbb{C}$.

Impedancia y admitancia.

¿Como se relacionan corriente y voltaje en la representación $\mathbb{C}$?

Retomamos como ejemplo el circuito RL:



$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \quad , \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \qquad (263.2)$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad , \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L}{R} \qquad (263.3)$$

En la representación compleja:

(263.4) $\tilde{I} = I_0 e^{i\varphi}$ con I_0 y φ dados por las relaciones (263.3).

(263.5) $\tilde{V} = \mathcal{E}_0$ (en este caso $\tilde{V} \in \mathbb{R}$)

Vemos que

(263.6) $$\tilde{I} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \tilde{V}$$

Definimos la admitancia $Y \in \mathbb{C} \;\big|\; \tilde{I} = Y \tilde{V}$ (263.7)

(263.8) $$Y = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$ (para la rama RL)

Definimos la impedancia $Z \in \mathbb{C} \;\big|\; \tilde{V} = Z \tilde{I}$ (263.9)

(263.10) $$Z = \frac{1}{Y}$$

- La impedancia tiene unidades de resistencia.
- La ec. (263.9) $\underbrace{\text{es}}_{\text{extiende}}$ la ley de Ohm en representación $\mathbb{C}$.

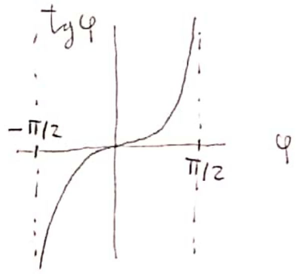
- Para calcular las impedancias de los elementos típicos de un circuito (R, L, C), podemos examinar los resultados que repasamos en la p. 256 y tomar límites según corresponda.

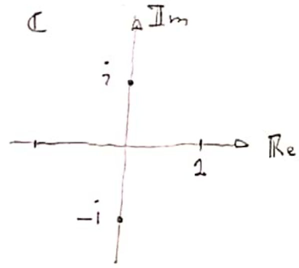
Por ejemplo, para el circuito RL vimos que

$$Y = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \rightarrow Z = \sqrt{R^2+(\omega L)^2}\cdot e^{-i\varphi} \quad \text{con } \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega L}{R}$$

- Tomamos el caso límite $R=0$ para obtener la <u>impedancia de una inductancia</u> para:

$$\lim_{R\to 0} \operatorname{tg}\varphi = -\infty$$





$$\Rightarrow \varphi = -\pi/2$$

$$e^{-i\varphi} = e^{i\pi/2} = i$$

$$\boxed{Z_L = i\omega L} \qquad Z_L \in \mathbb{I}$$

- La impedancia de una resistencia la hallamos haciendo $L=0$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\boxed{Z_R = R} \qquad Z_R \in \mathbb{R}$$

- examinamos el circuito RC para hallar la impedancia de un capacitor. La corriente es $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ ó $\tilde{I} = I_0 e^{i\varphi}$:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}} \quad \text{con } \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{R\omega C}$$

$$\tilde{V} = \varepsilon_0 = Z\,\tilde{I} \;; \quad \tilde{I} = I_0 e^{i\varphi} = \frac{\varepsilon_0 e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}} \;; \quad \tilde{V} = \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \tilde{V} = \sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}\, e^{-i\varphi}\, \tilde{I}$$

$$Z = \sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}\cdot e^{-i\varphi} \quad (\text{para } RC).$$

Tomamos $R \to 0$, $\operatorname{tg}\varphi \to \infty \Rightarrow \varphi = \pi/2 \;\therefore\; e^{-i\varphi} = e^{-i\pi/2} = -i = 1/i$

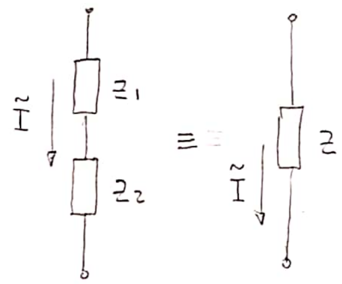
$$\boxed{Z_C = \frac{1}{i\omega C}} \qquad Z_C \in \mathbb{I}$$

- Resumiendo, para los elementos básicos de circuito:

	Z	Y
R	R	$1/R$
L	$i\omega L$	$\frac{1}{i\omega L}$
C	$\frac{1}{i\omega C}$	$i\omega C$

$$\tilde{V} = Z\,\tilde{I}$$
$$\tilde{I} = Y\,\tilde{V}$$

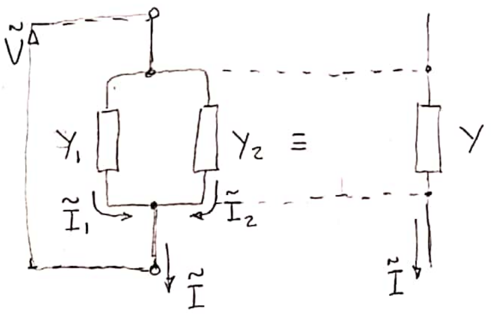
- Combinación en serie de elementos: se suman impedancias



$$\tilde{V} = \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 = Z_1\tilde{I} + Z_2\tilde{I} = (Z_1 + Z_2)\,\tilde{I} \equiv Z\,\tilde{I}$$

$$\boxed{Z = Z_1 + Z_2}$$

- Combinación en paralelo de elementos: se suman admitancias

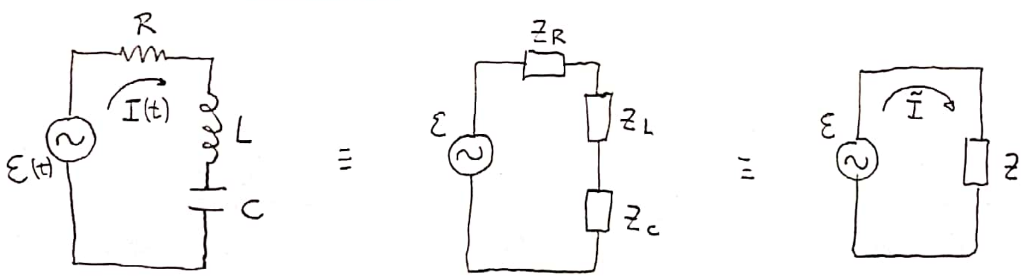


$$\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 = Y_1\tilde{V} + Y_2\tilde{V} = (Y_1 + Y_2)\,\tilde{V} \equiv Y\,\tilde{V}$$

$$\boxed{Y = Y_1 + Y_2}$$

Estrategia: hemos reducido el problema de circuitos AC a circuitos DC con la formulación compleja.

Circuito RLC:



Las impedancias son:

(266.1) $$Z_R = R \quad , \quad Z_L = i\omega L \quad , \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

como están en serie podemos sumarlas:

(266.2) $$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

(266.3) $$\tilde{V} = \mathcal{E}_0 = Z\tilde{I}$$

(266.4) $$\tilde{I} = \frac{1}{Z}\mathcal{E}_0$$, esto prácticamente resuelve el problema.

conviene reescribir Z en polares,

(266.5) $$Z = |Z|\, e^{i\varphi} \quad \text{con} \quad |Z|^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

(266.6) $$\Rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{1}{|Z|}\cdot e^{-i\varphi} = \frac{1}{|Z|}\, e^{i\phi} \quad \text{con} \quad \operatorname{tg}\phi = -\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad (266.7)$$

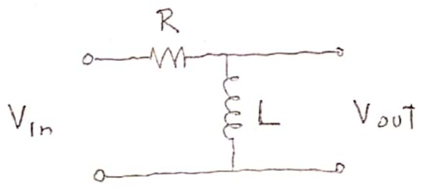
Entonces,

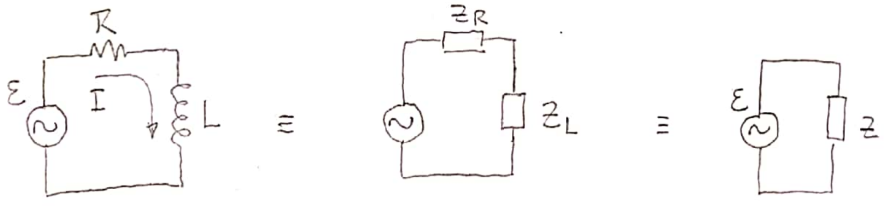
(266.8) $$\tilde{I} = I_0\, e^{i\phi} \quad \text{con} \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad \text{y } \phi \text{ dado por (266.7)}$$

Que es el resultado conocido.

Comparen cuanto mas laborioso es el formalismo real basado en ODEs.

Filtros y función de Transferencia





$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$

$Z = R + i\omega L = |Z|\, e^{i\varphi}$ con $|Z|^2 = R^2 + (\omega L)^2$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\omega L}{R}$

$\tilde{V} = Z\tilde{I} = \mathcal{E}_0$

$$\tilde{I} = \frac{1}{Z}\mathcal{E}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \cdot e^{-i\varphi} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot e^{-i\varphi}$$

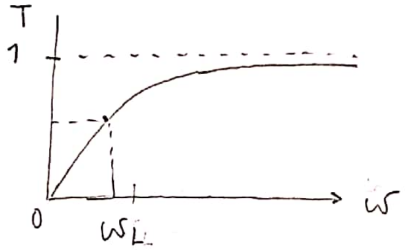
La diferencia de potencial en la inductancia L es V_{out}:

$$\tilde{V}_L = Z_L \tilde{I} = \frac{i\omega L}{Z}\mathcal{E}_0 = \frac{\mathcal{E}_0\, \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)}$$

La <u>función de Transferencia</u> se define

$$T = \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|$$

$$T(\omega) = \left| \frac{V_L}{\mathcal{E}_0} \right| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (R/\omega L)^2}}$$



filtro pasa altos.

Potencia en circuitos de corriente alterna.

- Consideremos una resistencia a la que se aplica una diferencia de potencial variable

(267.1) $$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

Por la resistencia R circula una corriente

(267.2) $$I(t) = \frac{1}{R} V(t) = \frac{V_0}{R} \cos(\omega t)$$

La potencia instantánea disipada en R es

(267.3) $$P = V(t)\, I(t) = \frac{V_0^2}{R} \cdot \cos^2(\omega t)$$

obs: como hay instantes de tiempo en los que $I(t) = 0$, $P(t) = 0$ en esos momentos.

El promedio temporal de la potencia es

(267.4) $$\overline{P} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R}$$

obs: $\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\, dt$; $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$.

En algunas aplicaciones se introduce el voltaje reescaleado:

(267.5) $$V_{rms} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$ (rms: root mean squared)

esto se carga el factor 1/2 en la expresión para la potencia

(267.6) $$\overline{P} = \frac{V_{rms}^2}{R}$$

- En general, para un circuito con otros componentes además de R podemos calcular a través de una rama: $P(t) = V(t)\, I(t)$.

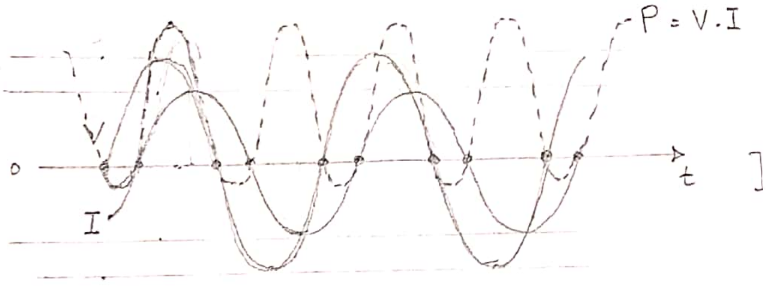
(267.7) Si $$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

(267.8) $$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

(267.9) $$P(t) = V(t)\, I(t) = V_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= V_0 I_0 \cos(\omega t) \left[\cos(\omega t) \cos\varphi - \sin(\omega t) \sin\varphi\right]$$

(267.10) $$P(t) = V_0 I_0 \left[\cos^2(\omega t) \cos\varphi - \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin\varphi\right]$$



(ilustración para un valor de φ arbitrario)

obs. $P = VI = 0$ si $V = 0$ v $I = 0$

- $P < 0$ si $(V < 0,\ I > 0)$ v $(V > 0,\ I < 0)$

- La potencia $P(t)$ expresada en la ec. (267.10) y en la figura es la potencia disipada en la rama considerada. Cuando $P(t) < 0$ el circuito (la rama) está entregando potencia.

Esto sucede cuando hay una inductancia o un capacitor que almacenan energía en los campos que generan durante una fase del ciclo, que luego entregan durante otra fase del mismo.

La potencia media la calculamos tomando el promedio temporal en un ciclo de la expresión (267.10):

$$\overline{P} = V_0 I_0 \cdot \Big[\cos\varphi \cdot \underbrace{\frac{1}{T}\int dt \cos^2(\omega t)}_{=1/2} - \cancel{\sin\varphi \frac{1}{T}\int dt \sin(\omega t) \cos(\omega t)} \Big]$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos\varphi$$

o en término de los valores rms:

$$\overline{P} = V_{rms} I_{rms} \cos\varphi$$