Teorema de Helmholtz

Tanto en electrostática como en magnetostática formulamos la Teoría en función dela divergencia y el rotor de los campos de interés en cada caso, $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

Las ecuaciones de Maxwell, que generalizan estas leyes al caso dinámico, También están formuladas en Términos de la divergencia y el rotor de ambos campos.

Ahora, es suficiente con conocer la divergencia y el rotor de un campo para determinar su comportamiento?

La respuesta formal, con las condiciones adecuadas, es el Teorema de Helmholtz: dadas la divergencia $D(\vec{r})$ y el rotor $\vec{R}(\vec{r})$ de un campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$, si Tanto D como $\vec{R}$ van a cero más rapido que $1/r^2$ para $r \to \infty$, y si $\vec{F}(\vec{r})$ se va a cero para $r \to \infty$, entonces $\vec{F}(\vec{r})$ está determinado unívocamente.

La prueba es constructiva, y si bien huele un poco a galerazo, cuando se entiende la lógica queda más clara la razón de la misma.

Suponemos entonces que conocemos la divergencia y el rotor de un campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$

(H1-1) $$\nabla \cdot \vec{F} = D(\vec{r}) \quad \text{(un campo escalar)}$$

(H1-2) $$\nabla \times \vec{F} = \vec{R}(\vec{r}) \quad \text{(un campo vectorial)}$$

Recordemos que como $\vec{R}$ es un rotor, su divergencia es nula:

(H1.3) $$\nabla \cdot \vec{R} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \equiv 0 .$$

Proponemos la siguiente solución, que ahora parece un galerazo pero en un rato con suerte será un poco mas claro:

(H1.4) $$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) + \nabla \times \vec{W}(\vec{r})$$

en donde los campos $U(\vec{r})$ y $\vec{W}(\vec{r})$ están dados por

(H2.1) $$U(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{\mathscr{r}} \cdot D(\vec{r}\,') \, dv'$$

(H2.2) $$\vec{W}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{\mathscr{r}} \cdot \vec{R}(\vec{r}\,') \, dv'$$

(H2.3) con $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}\,'$, integrando en todo el espacio.

Veamos que con $\vec{F}(\vec{r})$ construido de esta manera, se satisfacen las ecuaciones (H1.1) y (H1.2).

Primero calculamos la divergencia en la ec. (H1.4):

(H2.3) $$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla \cdot (\nabla U(\vec{r})) + \nabla \cdot (\nabla \times \vec{W})$$

pero la div. de un rot. se anula $\Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{W}) = 0$

y $\nabla \cdot (\nabla U) = \nabla^2 U$, con lo que

(H2.4) $$\nabla \cdot \vec{F} = -\nabla^2 U = -\frac{1}{4\pi} \int D(\vec{r}\,') \, \nabla^2 \left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) \cdot dv'$$

En donde hemos usado la definición de $U(\vec{r})$ ec. (H2.1) y como $\vec{\nabla}$ deriva con respecto a $\vec{r}$ no afecta a $D(\vec{r}\,')$.

Ahora, como resulta que

(H2.5) $$\nabla \left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = -\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$ (esto lo hemos visto antes, por ejemplo en las p. 95-96; ojo que ahí derivabamos con respecto a $\vec{r}\,'$, por eso el signo $(-)$)

y que

(H2.6) $$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right) = 4\pi \, \delta^3(\vec{\mathscr{r}})$$ (si, nuestra amiga la delta de Dirac, rec. p. 17)

tenemos que

(H2.7) $$\nabla^2 \left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = -4\pi \, \delta(\vec{\mathscr{r}}) \quad \therefore \quad -\frac{1}{4\pi} \cdot \nabla^2 \left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = \delta^3(\vec{\mathscr{r}})$$

Reemplazando esta expresión en (H2.4)

(H2.8) $$\nabla \cdot \vec{F} = \int D(\vec{r}\,') \, \delta^3(\vec{\mathscr{r}}) \, dv' = D(\vec{r})$$ (rec. $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}\,'$)

Es decir, la divergencia del campo construido como (H1.4) es, como debe ser, $D(\vec{r})$.

Tomamos ahora el rotor en la ec. (H1.4)

(H3.1) $$\nabla \times \vec{F} = -\nabla \times (\nabla U) + \nabla \times (\nabla \times \vec{W})$$

El primer término se anula ya que el rotor de un gradiente es cero siempre: $\nabla \times (\nabla U) = \vec{0}$.

El segundo término lo podemos reescribir como ya hemos hecho

(H3.2) $$\nabla \times (\nabla \times \vec{W}) = -\nabla^2 \vec{W} + \nabla (\nabla \cdot \vec{W})$$ (recordar p. 167')

Luego

(H3.3) $$\nabla \times \vec{F} = -\nabla^2 \vec{W} + \nabla (\nabla \cdot \vec{W})$$ con $\vec{W}$ dado por (H2.2)

Veamos cada término por separado. El primero

(H3.4) $$-\nabla^2 \vec{W} = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{R}(\vec{r}\,') \cdot \nabla^2 \left(\frac{1}{\pi}\right) dv' = \int \vec{R}(\vec{r}\,') \, \delta^3(\vec{\pi}) \, dv'$$ (usando H2.7)

(H3.5) $$\therefore -\nabla^2 \vec{W} = \vec{R}(\vec{r})$$ (es decir el rotor de $\vec{F}$!)

Veamos entonces que el otro término se anula. Calculamos la divergencia de $\vec{W}$:

(H3.6) $$\nabla \cdot \vec{W} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{R}(\vec{r}\,') \cdot \nabla \left(\frac{1}{\pi}\right) dv'$$

y reescribimos el gradiente, recordando que $\vec{\pi} = \vec{r} - \vec{r}\,'$,

(H3.7) $$\nabla \left(\frac{1}{\pi}\right) = -\nabla' \left(\frac{1}{\pi}\right)$$ cambiando la variable de derivación.

(H3.8) $$\nabla \cdot \vec{W} = \frac{-1}{4\pi} \int \vec{R}(\vec{r}\,') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\pi}\right) dv'$$

recordando que

(H3.9) $$\nabla \cdot (f \vec{A}) = f (\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\nabla f)$$

(H3.10) $$\Rightarrow \vec{R} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\pi}\right) = \nabla' \cdot \left(\vec{R}(\vec{r}\,') \frac{1}{\pi}\right) - \frac{1}{\pi} \nabla' \cdot \vec{R}(\vec{r}\,')$$

reemplazando en la integral

(H3.11) $$\nabla \cdot \vec{W} = -\frac{1}{4\pi} \int \nabla' \cdot \left(\frac{1}{\pi} \vec{R}(\vec{r}\,')\right) dv' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{\pi} \nabla' \cdot \vec{R}(\vec{r}\,') \, dv'$$

pero $\nabla \cdot \vec{R} = 0$ por (H1.3); es la div. de un rot.

y en el primer término podemos usar el teorema de la div.

(H4.1) $$\nabla\cdot\vec{W} = -\frac{1}{4\pi}\cdot\oint_S \frac{1}{r}\vec{R}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{s}\,' \longrightarrow 0$$

Esta integral de superficie se anula si $\vec{R}$ cae suficientemente rápido en el infinito.

Si así es, entonces hemos encontrado que (ver. ec. H3.3, H3.5, H4.1)

(H4.2) $$\nabla\times\vec{F} = \vec{R}$$

es decir que el rotor del campo construido es $\vec{R}$, como debe ser.

Para que todo esto tenga sentido, los campos $U(\vec{r})$ y $\vec{W}(\vec{r})$ deben existir, estar bien definidos por las integrales (H2.1) y (H2.2). Estas integrales tienen que converger. Como $\vec{R} = R_x\,\hat{x} + R_y\,\hat{y} + R_z\,\hat{z}$ lo que tenemos son integrales de la forma (también para D...)

$$\int \frac{1}{r}\varphi(r)\,r^2\,dr \sim \int \varphi(r)\,r\,dr \qquad \text{donde escribimos el } dv \sim r^2\,dr$$

Para que estas integrales no diverjan, necesitamos que $\varphi(r)$ decaiga más rápido que r^{-2}. Fíjense que $\varphi\sim r^{-2}$ no alcanza porque la integral daría un logaritmo que todavía explota en el infinito.

Estas son las condiciones que pedimos a $D(\vec{r})$ y $\vec{R}(\vec{r})$ en el enunciado del Teorema en p. H1.

Con estas condiciones sobra para que $\nabla\cdot\vec{W}=0$ en (H4.1).

Finalmente, cabe preguntarse si la solución propuesta (H1.4) es única. En principio, si sumamos una función cualquiera $\vec{F}_0$ cuyo rotor <u>y</u> divergencia sean nulos, también sería solución, ya que

$$\nabla\cdot(\vec{F}+\vec{F}_0) = \nabla\cdot\vec{F} + \cancel{\nabla\cdot\vec{F}_0} = D.$$

$$\nabla\times(\vec{F}+\vec{F}_0) = \nabla\times\vec{F} + \cancel{\nabla\times\vec{F}_0} = \vec{R}$$

La condición adicional $\vec{F}\to 0$ para $\vec{r}\to\infty$ cuida de esta posibilidad, ya que $\nexists\ \vec{F}_0$ tal que $\nabla\cdot\vec{F}_0=0$, $\nabla\times\vec{F}_0=\vec{0}$, $\vec{F}_0 \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$.

Luego, la solución (H1.4) es única en las condiciones del teorema de Helmholtz.

El Teorema de Helmholtz tiene como consecuencia que cualquier campo $\vec{F}(\vec{r})$ que decarga lo suficientemente rapido en el infinito ($\vec{F}(\vec{r}) \to 0$ mas rapido que $1/r$ para $r \to \infty$) se puede expresar como suma de un gradiente de un campo escalar mas el rotor de un campo vectorial:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \nabla \left(-\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{\kappa} \nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') \, d\tau' \right) + \nabla \times \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{\kappa} \nabla' \times \vec{F}(\vec{r}\,') \, d\tau' \right) \tag{HS.1}$$

- Para el caso particular de la electrostática tenemos:

$\vec{E}(\vec{r}) \mid \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad \wedge \quad \nabla \times \vec{E} = \vec{0}$, con lo que (HS.1) queda

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{\kappa} \rho(\vec{r}\,') \, d\tau' \right)$$

es decir

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \qquad \text{con} \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{\kappa} \rho(\vec{r}\,') \, d\tau'$$

- En el caso de la magnetostática, en cambio

$\vec{B}(\vec{r}) \mid \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \wedge \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, con lo que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{\kappa} \vec{J}(\vec{r}\,') \, d\tau' \right) =$$

es decir

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \qquad \text{con} \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{\kappa} \vec{J}(\vec{r}\,') \, d\tau'$$