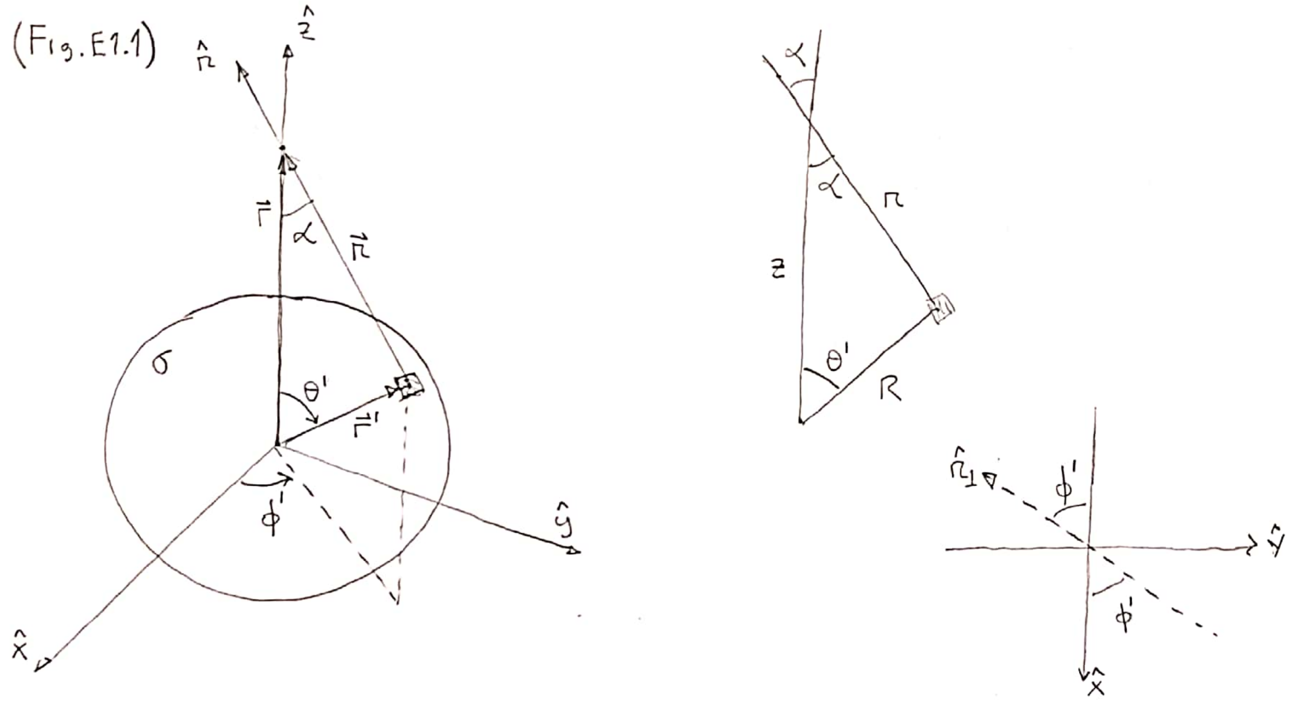
Un cascarón esférico con carga uniforme σ.

Vamos a ilustrar con este ejemplo las distintas maneras de calcular $\vec{E}(\vec{r})$ y $V(\vec{r})$ para una distribución de cargas.

① * Integración directa del campo $\vec{E}$; Ley de Coulomb.

Una esfera de radio R tiene una densidad superficial de carga uniforme σ. Queremos calcular el campo $\vec{E}(\vec{r})$ en todo el espacio. Sin pérdida de generalidad podemos calcular el campo en un punto $\vec{r}$ sobre el eje $\hat{z}$.

(Fig. E1.1)



La ley de Coulomb (p. 8):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_S \sigma(\vec{r}\,') \, \frac{\hat{\pi}}{\pi^2} \, ds' \tag{E1.1}$$

Para nuestro problema, evaluaremos $\vec{E}$ en $\vec{r} = z\,\hat{z}$

(E1.2) $\sigma(\vec{r}\,') \equiv \sigma$ es la densidad

(E1.3) $ds' = R^2 \sin\theta' \, d\theta' \, d\phi'$ un elemento diferencial de superficie

(E1.4) $\pi^2 = R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta'$ por el Teor. del coseno

(E1.5) $\hat{\pi} = \hat{\pi}(\theta', \phi') = \cos\alpha \, \hat{z} - \sin\alpha \, \sin\phi' \, \hat{x} - \sin\alpha \, \cos\phi' \, \hat{y}$

Scanned with CamScanner

Reemplazando en la expresión para el campo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S(R)} \frac{\sigma R^2 \sin\theta' \, d\theta' d\phi'}{R^2+z^2-2Rz\cos\theta'} \left(\cos\alpha\,\hat{z} - \sin\alpha \sin\phi'\,\hat{x} - \sin\alpha\cos\phi'\,\hat{y}\right)$$

Si bien el campo en principio tiene tres componentes $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$

Vemos que

$$(\hat{y}) \quad \int_0^{2\pi} d\phi' \cos\phi' = \sin\phi' \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$(\hat{x}) \quad \int_0^{2\pi} d\phi' \sin\phi' = -\cos\phi' \Big|_0^{2\pi} = -1+1 = 0$$

Luego las componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ se anulan. Esto es consecuencia de la simetría del problema: por cada elemento de carga contribuyendo componentes $\hat{x},\hat{y}$, hay un elemento de carga complementario del otro lado que las cancela.

En consecuencia solo sobrevive la componente $\hat{z}$ del campo: $\vec{E} \parallel \hat{z}$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S(R)} \frac{\sigma R^2 \sin\theta' \, d\theta' d\phi' \cos\alpha}{R^2+z^2-2Rz\cos\theta'} \,\hat{z}$$

En esta expresión, R y z son constantes, pero α varía en la integral. Lo podemos relacionar con θ' empleando nuevamente el teor. del coseno:

$$R^2 = z^2 + \text{r}^2 - 2\text{r} z\cos\alpha$$

reemplazando r^2 con (E1.4)

$$\cancel{R^2} = z^2 + \cancel{R^2} + z^2 - 2Rz\cos\theta' - 2\text{r} z\cos\alpha$$

$$\cancel{2}\text{r}\cancel{z}\cos\alpha = \cancel{2}z^{\cancel{2}} - \cancel{2}R\cancel{z}\cos\theta'$$

$$\cos\alpha = \frac{z - R\cos\theta'}{\text{r}}$$

Reemplazamos $\cos\alpha$ en la expresión de $\vec{E}$ y sacamos constantes

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi\sigma R^2\,\hat{z} \int_{S(R)} d\theta' \sin\theta' \,(z - R\cos\theta') \cdot \left[R^2+z^2-2Rz\cos\theta'\right]^{-3/2}$$

donde usamos $\int_0^{2\pi} d\phi' = 2\pi$ y reemplazamos $\frac{1}{\text{r}}$ por (E1.4)

Scanned with CamScanner

podemos hacer el cambio de variables

$u = \cos\theta'$
$du = -\sin\theta' \, d\theta'$

con límites de integración:
$\theta' = 0 \rightarrow u = 1$
$\theta' = \pi \rightarrow u = -1$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi\sigma R^2 \cdot \int_1^{-1} du\,(-)\,(z - Ru)\left(R^2 + z^2 - 2Rzu\right)^{-3/2} \hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, 2\pi\sigma R^2 \int_{-1}^{1} du\,(z - Ru)\left(R^2 + z^2 - 2Rzu\right)^{-3/2} \hat{z}$$

Resolvemos esta integral:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi\sigma R^2 \left[\frac{1}{z^2} \cdot \frac{zu - R}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rzu}}\right]_{-1}^{1} \hat{z}$$

Atentos al denominador:

$$(u=1) \quad \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz} = \sqrt{(z-R)^2} = |z - R| = \begin{cases} z - R & \text{si } z > R \\ R - z & \text{si } z < R \end{cases}$$

$$(u=-1) \quad \sqrt{R^2 + z^2 + 2Rz} = \sqrt{(z+R)^2} = |z + R| = z + R$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, 2\pi\sigma R^2 \cdot \frac{1}{z^2} \left[\frac{z - R}{|z - R|} + \frac{z + R}{|z + R|}\right] \hat{z}$$

Dentro de la esfera $z < R$: $|z - R| = R - z = -(z - R)$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi\sigma R^2}{z^2} \cdot \left[\frac{z - R}{-(z-R)} + \frac{z+R}{z+R}\right]\hat{z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi\sigma R^2}{z^2}\left[-1 + 1\right]\hat{z} = \vec{0}.$$

Fuera de la esfera $z > R$: $|z - R| = z - R$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi\sigma R^2}{z^2}\left[1 + 1\right]\hat{z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi\sigma R^2}{z^2} \hat{z}$$

Como la densidad σ es uniforme y la superficie de la esfera de radio R es $S = 4\pi R^2$, resulta que la carga total en la esfera es:

$q = 4\pi R^2 \sigma$, con lo cual el campo

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{z^2} \hat{z}}$$ para $z > R$.

Scanned with CamScanner

En definitiva el campo de un cascarón esférico cargado uniformemente con σ es

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^2}\,\hat{r} & \text{si } r \geq R \\ \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} & \text{si } r < R \quad \text{(dentro de la esfera)} \end{cases}$$

donde $q = 4\pi R^2 \sigma$ es la carga total.

Fuera del cascarón el campo es equivalente al de una carga puntual q, y dentro del cascarón el campo se anula.

Si recordamos el diagrama que conecta ρ, $V(\vec{r})$ y $\vec{E}(\vec{r})$, hemos recorrido la flecha que va de $\rho(\vec{r})$ a $\vec{E}(\vec{r})$:

A continuación vamos a recorrer el camino inverso, empleando la Ley de Gauss con ayuda de las simetrías de la distribución de cargas para hallar $\vec{E}$:

2 El campo eléctrico del cascarón cargado uniformemente

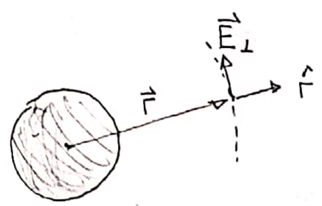
Ley de Gauss:

La simetría del problema sugiere el uso de coordenadas esféricas. En general

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r,\theta,\phi) = E_r(r,\theta,\phi)\,\hat{r} + E_\theta(r,\theta,\phi)\,\hat{\theta} + E_\phi(r,\theta,\phi)\,\hat{\phi}$$

Como la distribucion de cargas es invariante ante rotaciones en los ángulos θ y ϕ, el campo no puede depender de éstas variables:

$$\therefore\ \vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\,\hat{r} + E_\theta(r)\,\hat{\theta} + E_\phi(r)\,\hat{\phi}$$



Además, si existiera una componente $\vec{E}_\perp$ en el plano definido por $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$, una rotación alrededor del eje definido por $\hat{r}$ hará girar esta componente modificando su dirección, mientras que la distribución de cargas

Scanned with CamScanner

permanece invariante. Luego, no puede existir tal componente

$E_\theta \equiv 0 \quad , \quad E_\phi \equiv 0$

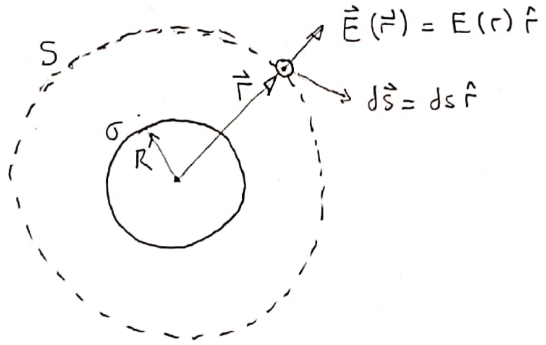
(ES.1) $$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}}$$

Vemos que las simetrías de la distribución de cargas imponen fuertes condiciones a la forma del campo. Recordemos ahora la Ley de Gauss: en su versión integral

(ES.2) $$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{en}}{\varepsilon_0}$$

Si bien lo que nos dice esta ecuación es "dame el campo $\vec{E}$ sobre la superficie S y te calculo Q_{en}", es decir es una flecha de $\vec{E}$ hacia P en el diagrama, la ecuación (ES.1) nos va a permitir evaluar la integral sin conocer el campo $\vec{E}$, y despejar $\vec{E}(\vec{r})$:

La clave está en elegir una superficie S que aproveche la forma del campo; en este caso será una superficie esférica de radio r (a esta la llamamos superficie "Gaussiana").



$$\oint_{S(r)} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_{S(r)} E(r)\,\hat{r}\cdot ds\,\hat{r} \overset{\hat{r}\cdot\hat{r}=1}{=} \oint_{S(r)} E(r)\,ds \overset{E(r)\text{ es cte en S.}}{=} E(r)\cdot \underbrace{\oint_{S(r)} ds}_{\text{sup. de la esfera } r} = 4\pi r^2 \cdot E(r)$$

(ES.3) $$\therefore \quad \boxed{\oint_{S(r)} \vec{E}\cdot d\vec{s} = 4\pi r^2\, E(r)}$$

obs: como prometimos, evaluamos la integral sin conocer $\vec{E}$.

obs: si bien en el dibujo ilustre con $r > R$, la cuenta es indiferente a ésto y vale también par $r \leq R$.

Para aplicar la ley de Gauss hay que calcular Q_{en}, y habrá que distinguir dos casos.

Scanned with CamScanner

• caso $r \geq R$: la esfera Gaussiana encierra toda la carga $\sigma(R)$

(E6.1) $$Q_{en} = 4\pi R^2 \cdot \sigma = q$$ la carga Total de la esfera.

en este caso

(E6.2) $$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \qquad (r > R)$$

• caso $r < R$: la carga encerrada es nula, $Q_{En} \equiv 0$

(E6.3) $$4\pi r^2 E(r) = 0 \Rightarrow E(r) = 0 \qquad \forall\, r < R.$$

En forma vectorial:

(E6.4) $$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^2}\,\hat{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

si bien el resultado es el mismo que obtuvimos por integración directa podemos apreciar las ventajas de la ley de Gauss cuando la simetría permite aplicarla.

Ya recorrimos los caminos 1 y 2 entre $\rho(\vec{r})$ y $\vec{E}(\vec{r})$.

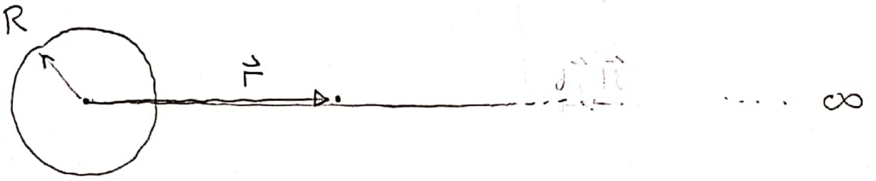
A continuación recorreremos el que va de $\vec{E}$ a V:

$$V(\vec{r}) \xleftarrow{3} \vec{E}(\vec{r})$$

3 Potencial electrostático a partir del campo eléctrico:

$$V(\vec{r}) \equiv -\int_{O}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$ (ver p. 23) con $\vec{E}$ dado por (E6.4).

en donde el punto de referencia O lo tomaremos en el infinito.



$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = +\int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{r}^{\infty} \frac{\hat{r}}{r'^2}\, dr'\hat{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_{r}^{\infty}$$

donde consideramos primero el caso $r \geq R$.

Scanned with CamScanner

(E7.1) $\quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \qquad r \geq R$

Para calcular el potencial en el interior de la esfera $r < R$ debemos separar la integral en dos contribuciones: $r \geq R$ y $r < R$ ya que la expresión para el campo (E6.4) difiere en estas dos regiones:

(E7.2) $$V(\vec{r}) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{R} \frac{dr'}{r'^2} \underbrace{- \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R}^{r} 0 \, dr'}_{\equiv 0} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{-1}{r'} \right]_{\infty}^{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R} \Bigg\}$$

Es decir que el potencial fuera del cascarón se ve como el de una carga puntual, y dentro del cascarón es constante y dado por (E7.2).

Es el turno de explorar el camino que nos falta: dada la distribución de cargas, hallar primero el potencial $V(\vec{r})$ y luego el campo eléctrico:

$$\begin{tikzcd} & \rho(\vec{r}) \arrow[dl, "4"'] & \\ V(\vec{r}) \arrow[rr, "5"'] & & \vec{E}(\vec{r}) \end{tikzcd}$$

(4) <u>Potencial electrostático</u> debido a una distribución de cargas por <u>Integración directa:</u> este problema es similar al (1) solo que ahora estamos integrando un escalar en vez de vectores.

Nos referimos a la Fig. E1.1. De nuevo elegimos un sistema de coordenadas esféricas.

$\vec{r} = z\,\hat{z}$

$\sigma(\vec{r}\,') \equiv \sigma$

$ds' = R^2 \sin\theta' \, d\theta' \, d\phi'$

$\mathcal{R}^2 = R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta'$

El potencial vendrá dado por la ecuación (24.5), pie de p. 24:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S(R)} \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{\mathcal{R}} \, ds'$$

Scanned with CamScanner

(E8.1) $$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sigma \int_S \frac{R^2 \sin\theta' \, d\theta' \, d\phi'}{\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\theta'}}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi' = 2\pi$$

(E8.2) $$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot (2\pi R^2 \sigma) \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta' \, d\theta'}{\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\theta'}}$$

Para evaluar la integral sustituimos:

$$u = \cos\theta' \qquad \theta' = 0 \rightarrow u = -1$$
$$du = -\sin\theta' \, d\theta' \qquad \theta' = 1 \rightarrow u = +1$$

$$\rightarrow \int_{+1}^{-1} \frac{-du}{\sqrt{A-Bu}} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{A-Bu}} \quad \text{con} \quad A \equiv R^2+z^2 \quad \text{y} \quad B \equiv 2Rz$$

Volvemos a reemplazar: (lo podríamos haber hecho en un paso ...)

$$v = A - Bu \qquad u = -1 \rightarrow v = A + B$$
$$dv = -B\,du \qquad u = +1 \rightarrow v = A - B$$

$$\rightarrow \int_{A-B}^{A+B} v^{-1/2} \cdot \frac{dv}{B} = \frac{1}{B} \cdot \left[\frac{v^{1/2}}{1/2} \right]_{A-B}^{A+B} = \frac{2}{B} \cdot \left[\sqrt{A+B} - \sqrt{A-B} \right]$$

$$= \frac{1}{Rz} \left[\sqrt{R^2+z^2+2Rz} - \sqrt{R^2+z^2-2Rz} \right]$$

$$= \frac{1}{Rz} \cdot \left[\sqrt{(z+R)^2} - \sqrt{(z-R)^2} \right] = \frac{1}{Rz} \left[(z+R) - |z-R| \right] = \circledast$$

Acá debemos distinguir los casos $z > R$ y $z < R$:

$$\circledast = \begin{cases} \dfrac{2}{z} & \text{si } z > R \\[2ex] \dfrac{2}{R} & \text{si } z < R \end{cases}$$

Volviendo a la expresion para $V(\vec{r})$

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} (2\pi R^2 \sigma) \cdot \dfrac{2}{z} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{4\pi R^2 \sigma}{z} & \text{si } z > R \\[3ex] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} (2\pi R^2 \sigma) \cdot \dfrac{2}{R} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{4\pi R^2 \sigma}{R} & \text{si } z < R \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Vemos que en esta expresión podríamos reemplazar por la carga Total:

(E9.1) $$q \equiv 4\pi R^2 \cdot \sigma$$

Con lo que, reemplazando nuevamente z por r:

(E9.2) $$V(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r} & \text{fuera de la esfera } (r > R) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q}{R} & \text{dentro de la esfera } (r \leq R) \text{ constante.} \end{cases}$$

Este resultado concuerda, claro, con el obtenido anteriormente por el camino 3 a partir del campo. Podemos ver cuánto más simple resulta evaluar $V(\vec{r})$ que $\vec{E}(\vec{r})$ por integración directa.

A continuación, podemos obtener el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ a partir de la expresión para el potencial (E9.2). Este es el camino 5: $V(\vec{r}) \longrightarrow \vec{E}(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}).$$

5 <u>Campo eléctrico a partir del potencial:</u>

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

- dentro de la esfera $V(\vec{r}) = cte = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{R}$

$\therefore \nabla V(\vec{r}) = 0$ y resulta $\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \forall r < R$.

- fuera de la esfera $V(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r}$

y debemos calcular:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \qquad \text{con } \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left((x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right)$$

Scanned with CamScanner

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = (-)\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}.(2x)\,\hat{x}$$
$$(-)\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}.(2y)\,\hat{y}$$
$$(-)\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}(2z)\,\hat{z}$$

$$= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}.\left(x\,\hat{x}+y\,\hat{y}+z\,\hat{z}\right)$$
$$= -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\frac{\hat{r}}{r^2} \qquad \therefore \boxed{\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}} \qquad (E10.1)$$

El campo eléctrico fuera del cascarón será entonces

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\,\hat{r}$$

$$\therefore \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\,\hat{r}} \qquad (E10.2) \qquad \text{para } r > R.$$

Esto está de acuerdo con lo que ya sabíamos.

Scanned with CamScanner