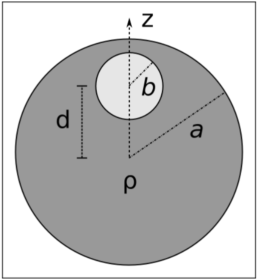
Clase 3: Problema 13

Susana Landau & Andrés Goya

20 de Abril de 2020

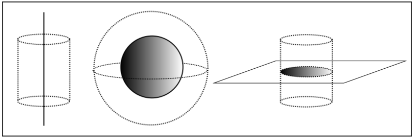
Enunciado:

Una esfera de radio a, cargada uniformemente con densidad ρ, posee un agujero esférico de radio $b < a$ en su interior. El centro del agujero está a una distancia $d < (a - b)$ del centro de la esfera (es decir, el hueco de radio b NO es concéntrico con la esfera de radio a). Obtenga el valor del campo eléctrico sobre el eje de simetría de la configuración. Verifique que en el centro del agujero el valor del campo es el mismo que habría si no se hubiera practicado el agujero.



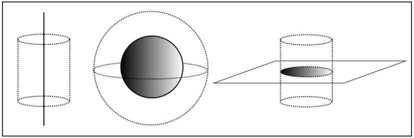
Guía 1 - Problema 13 - ¿ Ley de Gauss?

Algo que suele ser muy conveniente y práctico para resolver los problemas de electrostática es usar la ley de Gauss como se hizo en la clase anterior.



Guía 1 - Problema 13 - ¿ Ley de Gauss?

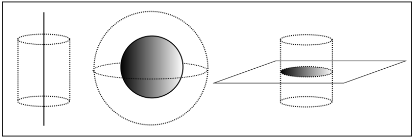
Algo que suele ser muy conveniente y práctico para resolver los problemas de electrostática es usar la ley de Gauss como se hizo en la clase anterior.



Sin embargo, en este problema **NO** lo es.

Guía 1 - Problema 13 - ¿ Ley de Gauss?

Algo que suele ser muy conveniente y práctico para resolver los problemas de electrostática es usar la ley de Gauss como se hizo en la clase anterior.



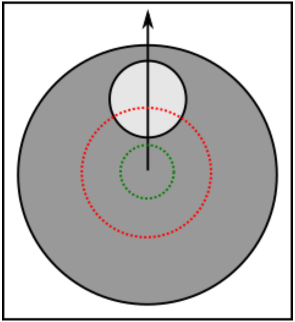
Sin embargo, en este problema **NO** lo es.

IMPORTANTE: La ley de Gauss vale siempre, pero no siempre es útil (como en este caso). Para que sea útil debemos tener una configuración de cargas cuya simetría nos permita inferir la dirección del campo sobre las superficies de Gauss que utilicemos.

En el *Problema 9* aprovechamos la simetría de los distintos casos para proponer superficies de Gauss adaptadas a dicha simetría sobre las cuales el campo eléctrico es perpendicular y constante. Siendo más precisos: esferas con esferas, cilindros con cilindros.

Guía 1 - Problema 13 - ¿ Ley de Gauss?

Si intentasemos utilizar la ley de Gauss, ¿en dirección debería apuntar el campo eléctrico sobre las superficies de color verde y rojo? ¿Cuál sería la dependencia del campo eléctrico con las coordenadas?



Debemos buscar otra manera de resolver el problema.

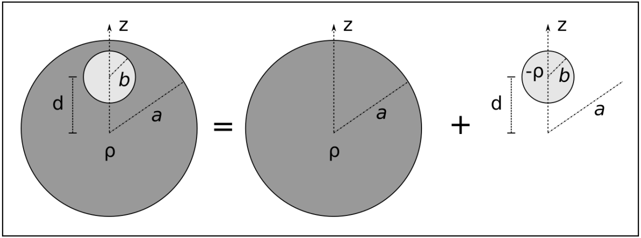
Guía 1 - Problema 13 - Superposición

Entonces, ¿cómo vamos a resolver este problema?

Otro de los principios fundamentales (y sumamente útiles) es el de **superposición**. Este principio nos permite obtener el campo eléctrico de una dada configuración sumando el campo eléctrico de cada una de sus partes.

Entonces, ¿cómo vamos a resolver este problema?

Otro de los principios fundamentales (y sumamente útiles) es el de **superposición**. Este principio nos permite obtener el campo eléctrico de una dada configuración sumando el campo eléctrico de cada una de sus partes.



$$\vec{E}_{(\text{Esfera con hueco})} = \vec{E}^{(1)}_{(\text{Esfera } r=a \text{ y } \rho>0)} + \vec{E}^{(2)}_{(\text{Esfera desplazada con } r=b \text{ y } \rho<0)}$$

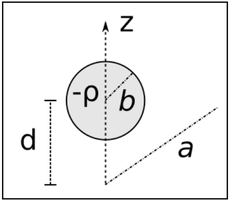
Recordemos que en el *Problema (8.d)* obtuvimos el campo eléctrico de una esfera de radio r con densidad uniforme ρ

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r}\,, & r \leq R\,, \\ \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3}\,, & r > R\,. \end{cases} \tag{1}$$

Entonces, para hallar el campo de la esfera con hueco descentrado debemos obtener:

- $\vec{E}^{(1)}$: el campo de esfera de radio a con carga ρ, éste se obtiene reemplazando $R \to a$ en (1);
- $\vec{E}^{(2)}$: el campo de una esfera de radio b con carga $-\rho$ a una distancia d del origen, éste se obtiene a partir de (1) reemplazando $R \to b$, cambiando el signo de la densidad de carga $\rho \to -\rho$, y desplazando la distribución de carga una distancia en la dirección $\hat{z}$.

Guía 1 - Problema 13 - Resolución II



El campo eléctrico desplazado $\vec{E}^{(2)}$ se obtiene evaluando $z \to z - d$ en la ecuación (1). Más precisamente, el "nuevo" campo eléctrico será el "viejo" $\vec{E}(\vec{r} = z\hat{z})$ evaluado en $z \to z - d$. Esto es lo mismo que ver el campo eléctrico generado por una esfera con densidad de carga ρ desde un punto desplazado del origen una distancia d en la dirección $\hat{z}$.

Entonces, haciendo también los reemplazos $\rho \to -\rho$ y $R \to b$ el campo $\vec{E}^{(2)}$ nos queda:

$$\vec{E}^{(2)}_{\text{sobre el eje } z} = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{3\epsilon_0}(z-d)\hat{z}\,, & |z-d| \leq b\,, \\[2ex] -\dfrac{\rho b^3}{3\epsilon_0}\dfrac{(z-d)}{|z-d|^3}\,, & |z-d| > b\,. \end{cases} \tag{2}$$

Guía 1 - Problema 13 - Resolución III

$$\vec{E}^{(2)}_{\text{sobre el eje } z} = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{3\epsilon_0}(z-d)\hat{z}\,, & |z-d| \leq b\,, \\ -\dfrac{\rho b^3}{3\epsilon_0}\dfrac{(z-d)}{|z-d|^3}\,, & |z-d| > b\,. \end{cases}$$

Es importante chequear que el campo apunta en la dirección correcta tanto en la zona exterior como en la zona interior. En nuestro caso la dirección correcta es hacia el centro de la esfera.

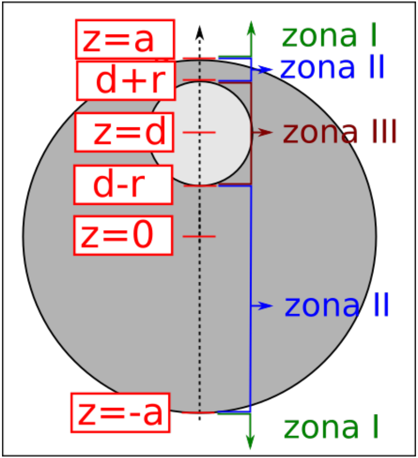
Guía 1 - Problema 13 - Resolución IV

Una manera sencilla de convencernos de que el resultado anterior es el correcto es ver dónde el campo eléctrico se anula: esto sucede cuando nos ubicamos en el centro de la esfera, es decir cuando $z = d$ en la configuración desplazada ($z = 0$ en el campo original). A su vez, el campo de comportamiento en el campo eléctrico se da cuando nos alejamos una distancia b desde el centro de la esfera.

Para finalizar la resolución del problema notemos que la configuracón de la esfera con hueco tiene tres zonas diferentes según estemos dentro o fuera de la esfera y del hueco, a saber

- zona I, fuera de la esfera $|z| > a$ y $|z - d| > b$;
- zona II, dentro de la esfera y fuera del hueco $|z| \leq a$ y $|z - d| > b$;
- zona III, dentro del hueco $|z| \leq a$ y $|z - d| \leq b$.

Guía 1 - Problema 13 - Resolución V



Sumando las distinas contribuciones

$$\vec{E}_{(\text{Esfera con hueco})} = \vec{E}^{(1)}_{(\text{Esfera } r=a \text{ y } \rho>0)} + \vec{E}^{(2)}_{(\text{Esfera desplazada con } r=b \text{ y } \rho<0)}\,,$$

se obtiene

$$E_z(z) = \begin{cases} \dfrac{\rho a^3}{3\epsilon_0}\dfrac{z}{|z|^3} - \dfrac{\rho b^3}{3\epsilon_0}\dfrac{(z-d)}{|z-d|^3}\,, & |z|>a\,, |z-d|>b\,, \\ \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}z - \dfrac{\rho b^3}{3\epsilon_0}\dfrac{(z-d)}{|z-d|^3}\,, & |z|\leq a\,, |z-d|>b\,, \\ \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}z - \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}(z-d) = \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}d\,, & |z|\leq a\,, |z-d|\leq b\,. \end{cases} \tag{3}$$

Debemos notar que el campo dentro del hueco toma exactamente el mismo valor que si el hueco no existiese. ¿Es curioso, no?

Guía 1 - Problema 13 - Resolución VII

Esto se debe a que las contribuciones provenientes de la esfera llena y la esfera pequeña con carga negativa se compensan de modo tal que el campo en la zona de superposición es constante.

Quizá hacer un dibujo clarifique las cosas:

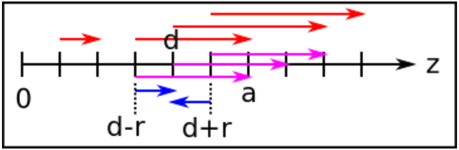


Figura: En rojo el campo de la esfera llena con carga positiva, en azul el campo de la esfera pequeña con carga negativa y en magenta el campo resultante. Notar que las flechas magenta tienen el mismo largo que las fechas rojas para la region $(d - r, d + r)$, es decir, donde se encuentra el hueco.

Guía 1 - Problema 13 - Caso General

Noten que podríamos haber obtenido el campo en cualquier punto de la esfera, sabiendo que el campo eléctrico de una esfera desplazada del origen en un vector $\vec{d} = d\hat{z}$ es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}(\vec{r}-\vec{d})\,, & |\vec{r}-\vec{d}| \leq b\,, \\ \dfrac{\rho b^3}{3\epsilon_0}\dfrac{(\vec{r}-\vec{d})}{|(\vec{r}-\vec{d})|^3}\,, & |\vec{r}-\vec{d}| > b\,. \end{cases} \tag{4}$$

Haciendo superposición obtendríamos (cualitativamente) las siguientes lineas de campo