Clase 4: Desarrollo multipolar del potencial eléctrico.

Susana J. Landau & Andres Goya

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

Lejos de cualquier configuración, el potencial eléctrico se puede expresar:

$$\Phi(\vec{r}) = C + \frac{k\,Q_{\mathrm{total}}}{|\vec{r}|} + \frac{k\,\vec{P}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots \tag{1}$$

donde $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ y C es una constante,
Q_{total} la carga total de la configuración
$\vec{P}$ momento dipolar de la configuración de cargas.

Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

Lejos de cualquier configuración, el potencial eléctrico se puede expresar:

$$\Phi(\vec{r}) = C + \frac{k\,Q_{\text{total}}}{|\vec{r}|} + \frac{k\,\vec{P}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots \tag{1}$$

donde $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ y C es una constante,
Q_{total} la carga total de la configuración
$\vec{P}$ momento dipolar de la configuración de cargas.

Para una distribución de cargas puntuales:

$$Q_{\text{total}} = \sum_i q_i \qquad \vec{P} = \sum_i q_i \vec{r_i} \tag{2}$$

Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

Para una distribución continua de cargas:

$$Q_{\text{total}} = \int_V \rho(\vec{r}) dV \qquad \vec{P} = \int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV \tag{3}$$

Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

Para una distribución continua de cargas:

$$Q_{\text{total}} = \int_V \rho(\vec{r})dV \qquad \vec{P} = \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV \tag{3}$$

Qué ocurre si el origen de coordenadas se desplaza?, es decir $\vec{r'} = \vec{r} + \vec{a}$?

$$\vec{P'} = \int_V \rho(\vec{r'})\vec{r'}dV'$$

Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

Para una distribución continua de cargas:

$$Q_{\text{total}} = \int_V \rho(\vec{r})dV \qquad \vec{P} = \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV \tag{3}$$

Qué ocurre si el origen de coordenadas se desplaza?, es decir $\vec{r'} = \vec{r} + \vec{a}$?

$$\begin{aligned}\vec{P'} &= \int_V \rho(\vec{r'})\vec{r'}dV' \\ &= \int_V \rho(\vec{r})(\vec{r} + \vec{a})dV\end{aligned}$$

Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

Para una distribución continua de cargas:

$$Q_{\text{total}} = \int_V \rho(\vec{r})dV \qquad \vec{P} = \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV \tag{3}$$

Qué ocurre si el origen de coordenadas se desplaza?, es decir $\vec{r'} = \vec{r} + \vec{a}$?

$$\begin{aligned} \vec{P'} &= \int_V \rho(\vec{r'})\vec{r'}dV' \\ &= \int_V \rho(\vec{r})(\vec{r} + \vec{a})dV \\ &= \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV + \int_V \rho(\vec{r})\,\vec{a}\,dV \end{aligned}$$

Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

Para una distribución continua de cargas:

$$Q_{\text{total}} = \int_V \rho(\vec{r})dV \qquad \vec{P} = \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV \tag{3}$$

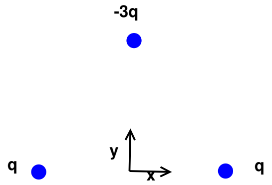
Qué ocurre si el origen de coordenadas se desplaza?, es decir $\vec{r'} = \vec{r} + \vec{a}$?

$$\begin{aligned} \vec{P'} &= \int_V \rho(\vec{r'})\vec{r'}dV' \\ &= \int_V \rho(\vec{r})(\vec{r} + \vec{a})dV \\ &= \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV + \int_V \rho(\vec{r})\,\vec{a}\,dV \\ &= \vec{P} + \vec{a}Q \end{aligned} \tag{4}$$

El momento dipolar es independiente del sistema de coordenadas sólo en el caso de que la carga total de la configuración de cargas sea nula.

Ejercicio 15

Enunciado: Como se ven de lejos las siguientes configuraciones de carga?



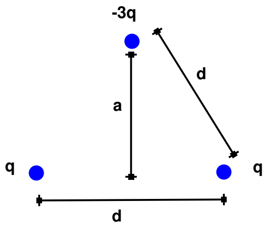
Para ello, vamos a calcular primero el desarrollo multipolar del potencial que nos da la expresión del mismo muy lejos de la configuración de cargas y luego derivando el potencial obtendremos el campo en el mismo límite.

El origen de coordenadas, lo situamos sobre la recta que une la posición de ambas cargas q y equidistante de ambas cargas.

La carga total es :

$$Q_{\text{total}} = -q$$

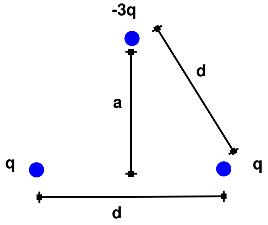
Ejercicio 15



Vamos a calcular ahora el momento dipolar desde el centro de coordenadas elegido:

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r_i}$$

Ejercicio 15

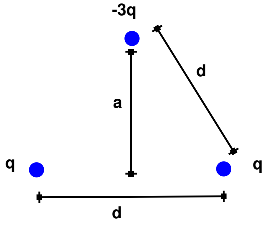


Vamos a calcular ahora el momento dipolar desde el centro de coordenadas elegido:

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r_i}$$

Por el teorema de Pitagoras inferimos $d^2 = a^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$, es decir $a = \frac{\sqrt{3}}{2}d$.

Ejercicio 15



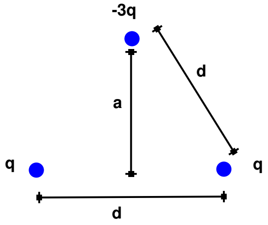
Vamos a calcular ahora el momento dipolar desde el centro de coordenadas elegido:

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r_i}$$

Por el teorema de Pitagoras inferimos $d^2 = a^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$, es decir $a = \frac{\sqrt{3}}{2} d$.

$$\vec{P} \;=\; q(-\frac{d}{2})\,\hat{x} + q\frac{d}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} d\,(-3q)\,\hat{y}$$

Ejercicio 15



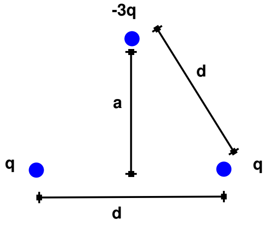
Vamos a calcular ahora el momento dipolar desde el centro de coordenadas elegido:

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r_i}$$

Por el teorema de Pitagoras inferimos $d^2 = a^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$, es decir $a = \frac{\sqrt{3}}{2}d$.

$$\begin{aligned}\vec{P} &= q(-\frac{d}{2})\,\hat{x} + q\frac{d}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}d\,(-3q)\,\hat{y} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2}d\,q\,\hat{y}\end{aligned}$$

Ejercicio 15



Vamos a calcular ahora el momento dipolar desde el centro de coordenadas elegido:

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r_i}$$

Por el teorema de Pitagoras inferimos $d^2 = a^2 + (\frac{d}{2})^2$, es decir $a = \frac{\sqrt{3}}{2} d$.

$$\begin{aligned} \vec{P} &= q(-\frac{d}{2})\,\hat{x} + q\frac{d}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} d\,(-3q)\,\hat{y} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,\hat{y} \end{aligned}$$

Ahora escribimos el potencial para puntos muy lejanos:

$$\Phi(\vec{r}) = C - \frac{k\,q}{|\vec{r}|} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,\hat{y}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots$$

Ejercicio 15

El desarollo multiplar del potencial:

$$\Phi(\vec{r}) \quad = \quad C - \frac{k\,q}{|\vec{r}|} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,\hat{y}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots$$

Ejercicio 15

El desarollo multiplar del potencial:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= C - \frac{k\,q}{|\vec{r}|} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2}d\,q\,\hat{y}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots \\ &= C - \frac{k\,q}{|\vec{r}|} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2}d\,q\,y}{|\vec{r}|^3} + \cdots\end{aligned}$$

Ejercicio 15

El desarollo multiplar del potencial:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= C - \frac{k\,q}{|\vec{r}|} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,\hat{y}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots \\ &= C - \frac{k\,q}{|\vec{r}|} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,y}{|\vec{r}|^3} + \cdots\end{aligned}$$

Calculamos ahora el campo eléctrico recordando que $\vec{E} = -\nabla\Phi$:

$$\vec{E} = -\left(\frac{d\Phi}{dx}\hat{x} + \frac{d\Phi}{dy}\hat{y} + \frac{d\Phi}{dz}\hat{z}\right)$$

Ejercicio 15

El desarollo multiplar del potencial:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= C - \frac{k\,q}{|\vec{r}|} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,\hat{y}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots \\ &= C - \frac{k\,q}{|\vec{r}|} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,y}{|\vec{r}|^3} + \cdots\end{aligned}$$

Calculamos ahora el campo eléctrico recordando que $\vec{E} = -\nabla\Phi$:

$$\vec{E} = -(\frac{d\Phi}{dx}\hat{x} + \frac{d\Phi}{dy}\hat{y} + \frac{d\Phi}{dz}\hat{z})$$

Vamos a derivar respecto de cada coordenada por separado:

$$E_x = -\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{kqx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{9\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\,x}{2\ (x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Ejercicio 15

Recordando la expresión para el potencial:

$$\Phi(\vec{r}) \quad = \quad C - \frac{k\,q}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2}d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Ejercicio 15

Recordando la expresión para el potencial:

$$\Phi(\vec{r}) \quad = \quad C - \frac{k\,q}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora E_y y E_z:

$$E_y \quad = \quad -\frac{d\Phi}{dy} = -\frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d}{2} \times$$

Ejercicio 15

Recordando la expresión para el potencial:

$$\Phi(\vec{r}) \;\; = \;\; C - \frac{k\,q}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora E_y y E_z:

$$\begin{aligned} E_y \;\; &= \;\; -\frac{d\Phi}{dy} = -\frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d}{2} \times \\ & \left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right] \end{aligned}$$

Ejercicio 15

Recordando la expresión para el potencial:

$$\Phi(\vec{r}) = C - \frac{k\,q}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora E_y y E_z:

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{d\Phi}{dy} = -\frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d}{2} \times \\ &\quad \left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} 2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right] \\ &= -\frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d}{2}\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] \end{aligned}$$

Ejercicio 15

Recordando la expresión para el potencial:

$$\Phi(\vec{r}) \quad = \quad C - \frac{k\,q}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora E_y y E_z:

$$\begin{aligned}
E_y &= -\frac{d\Phi}{dy} = -\frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d}{2} \times \\
&\quad \left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} 2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right] \\
&= -\frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d}{2}\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] \\
E_z &= -\frac{d\Phi}{dz} = -\frac{kqz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{9\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\,z}{2\;(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 15

Finalmente obtenemos:

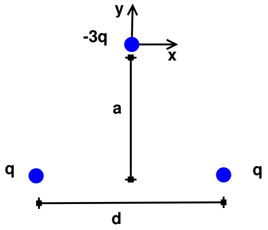
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kq\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,\hat{y}}{2\ \ |\vec{r}|^3} - \frac{9\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\vec{r}}{2\ \ |\vec{r}|^5}$$

Ejercicio 15

Finalmente obtenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kq\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,\hat{y}}{2\ \ |\vec{r}|^3} - \frac{9\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\vec{r}}{2\ \ |\vec{r}|^5}$$

Veamos ahora como se escribe el momento dipolar $\vec{P}$ si situamos el origen de coordenadas en la posición de la carga $-3q$. LLamaremos a este punto O'



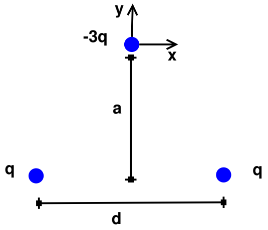
$$\vec{P}_{O'}(\vec{r}) \quad = \quad q(-\frac{d}{2}\hat{x} - a\hat{y}) + q(\frac{d}{2}\hat{x} - a\hat{y})$$

Ejercicio 15

Finalmente obtenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kq\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,\hat{y}}{2\ \ |\vec{r}|^3} - \frac{9\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\vec{r}}{2\ \ |\vec{r}|^5}$$

Veamos ahora como se escribe el momento dipolar $\vec{P}$ si situamos el origen de coordenadas en la posición de la carga $-3q$. LLamaremos a este punto O'



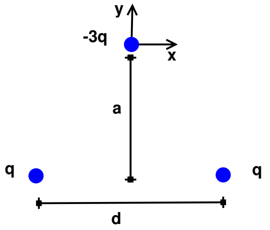
$$\begin{aligned} \vec{P}_{O'}(\vec{r}) &= q(-\frac{d}{2}\hat{x} - a\hat{y}) + q(\frac{d}{2}\hat{x} - a\hat{y}) \\ &= -2\,q\,a\,\hat{y} \end{aligned}$$

Ejercicio 15

Finalmente obtenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kq\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,\hat{y}}{2\ \ |\vec{r}|^3} - \frac{9\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\vec{r}}{2\ \ |\vec{r}|^5}$$

Veamos ahora como se escribe el momento dipolar $\vec{P}$ si situamos el origen de coordenadas en la posición de la carga $-3q$. LLamaremos a este punto O'

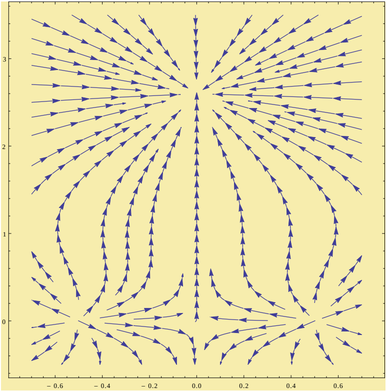


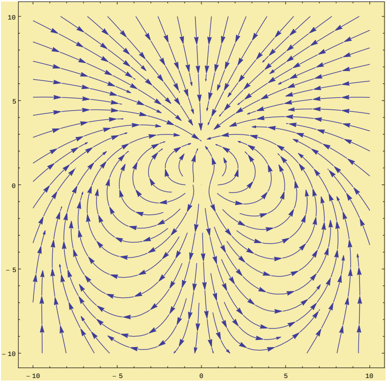
$$\begin{aligned}\vec{P}_{O'}(\vec{r}) &= q(-\frac{d}{2}\hat{x} - a\hat{y}) + q(\frac{d}{2}\hat{x} - a\hat{y}) \\ &= -2\,q\,a\,\hat{y} \\ &= -q\,\sqrt{3}\,d\,\hat{y}\end{aligned}$$

Podemos comparar este último resultado con el cálculo anterior del momento dipolar desde otro origen de coordenadas: $\vec{P} = -\frac{3\sqrt{3}\,q\,d}{2}\hat{y}$

Ejercicio 15

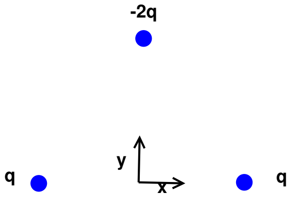
En la figura de la izquierda se ven las lineas de campo cerca de la configuración de cargas y en la figura de la derecha se muestran las lineas de campo lejos de la configuración de cargas.





Ejercicio 15

Veamos ahora la siguiente configuración de cargas:

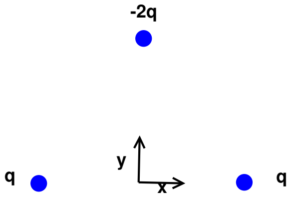


En este caso $Q_{\text{total}} = 0$. Veamos ahora $\vec{P}$.

$$\begin{aligned}\vec{P} &= q(-\frac{d}{2})\,\hat{x} + q\frac{d}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}d\,(-2q)\,\hat{y} \\ &= -\sqrt{3}d\,q\,\hat{y}\end{aligned}$$

Ejercicio 15

Veamos ahora la siguiente configuración de cargas:



En este caso $Q_{\text{total}} = 0$. Veamos ahora $\vec{P}$.

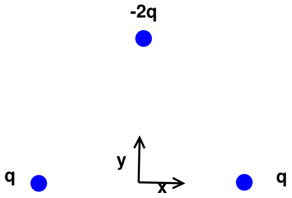
$$\begin{aligned} \vec{P} &= q(-\frac{d}{2})\,\hat{x} + q\frac{d}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}d\,(-2q)\,\hat{y} \\ &= -\sqrt{3}d\,q\,\hat{y} \end{aligned}$$

Entonces escribimos el potencial $\Phi(\vec{r})$:

$$\Phi(\vec{r}) = C - \frac{k\,\sqrt{3}d\,q\,\hat{y}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots$$

Ejercicio 15

Veamos ahora la siguiente configuración de cargas:



En este caso $Q_{\text{total}} = 0$. Veamos ahora $\vec{P}$.

$$\begin{aligned} \vec{P} &= q(-\frac{d}{2})\,\hat{x} + q\frac{d}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}d\,(-2q)\,\hat{y} \\ &= -\sqrt{3}d\,q\,\hat{y} \end{aligned}$$

Entonces escribimos el potencial $\Phi(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= C - \frac{k\,\sqrt{3}d\,q\,\hat{y}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots \\ &= C - \frac{k\,\sqrt{3}d\,q\,y}{|\vec{r}|^3} + \cdots \end{aligned}$$

Ejercicio 15

$$\Phi(\vec{r}) = C - \frac{k\sqrt{3} d\, q\, y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora el campo eléctrico

$$E_x = -\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{3\sqrt{3}\, k\, q\, d\, y\, x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Ejercicio 15

$$\Phi(\vec{r}) = C - \frac{k\sqrt{3}d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora el campo eléctrico

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
E_y &= -\frac{d\Phi}{dy} = \sqrt{3}\,k\,q\,d\times \\
&\left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right]
\end{aligned}$$

Ejercicio 15

$$\Phi(\vec{r}) \quad = \quad C - \frac{k\sqrt{3}d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora el campo eléctrico

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
E_y &= -\frac{d\Phi}{dy} = \sqrt{3}\,k\,q\,d\,\times \\
&\quad \left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right] \\
&= \sqrt{3}\,k\,q\,d\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right]
\end{aligned}$$

Ejercicio 15

$$\Phi(\vec{r}) = C - \frac{k\sqrt{3}d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora el campo eléctrico

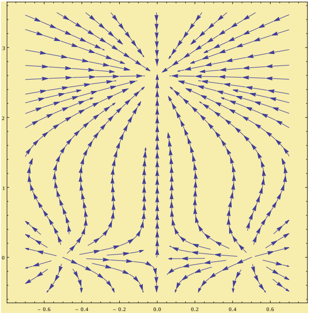
$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
E_y &= -\frac{d\Phi}{dy} = \sqrt{3}\,k\,q\,d\,\times \\
&\quad \left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right] \\
&= \sqrt{3}\,k\,q\,d\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] \\
E_z &= -\frac{d\Phi}{dz} = -\frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}
\end{aligned}$$

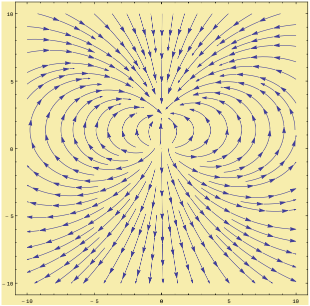
Ejercicio 15

Finalmente obtenemos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sqrt{3}\, k\, q\, d \left[\frac{\hat{y}}{|\vec{r}|^3} - \frac{3y\vec{r}}{|\vec{r}|^5} \right]$$

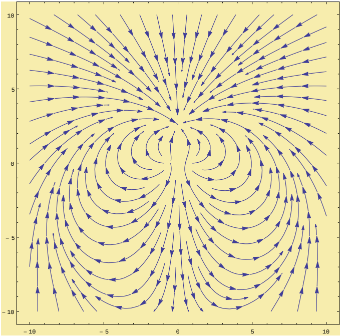
Veamos ahora las lineas de campo: Izquierda: cerca de la configuración de cargas; Derecha: lejos de la configuración de cargas.

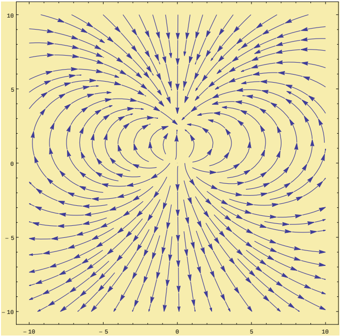




Ejercicio 15

Comparación de las lineas de campo vistas desde lejos de las dos configuraciones de cargas estudiadas en esta clase. Izquierda: carga negativa $= -3q$, Derecha: carga negativa $= -2q$.

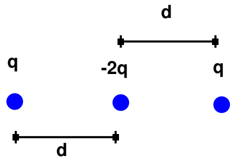




En la figura derecha se puede ver que muy lejos, el campo es igual al campo de un dipolo, es decir una carga con positiva y una carga negativa de igual valor separadas por una distancia muy pequeña.

Ejercicio 15

Veamos ahora la siguiente configuración de cargas:



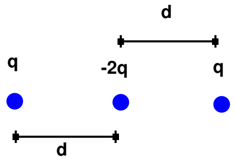
En este caso : $Q_{\text{total}} = 0$ y

$$\vec{P} = q(-\frac{d}{2})\hat{x} + q\frac{d}{2}\hat{x} = 0$$

. En este caso tanto Q como $\vec{P}$ son nulos, como se escribirá el potencial? Recuerden que estamos escribiendo el desarrollo multipolar del potencial, el primer término depende de la distancia al origen de coordenadas como $\frac{Q}{r}$, el segundo término va como $\frac{|\vec{P}|}{r^2}$. Que dependencia con r tendrá el próximo término del desarrolo multipolar?

Ejercicio 15

Veamos ahora la siguiente configuración de cargas:



En este caso : $Q_{\text{total}} = 0$ y

$$\vec{P} = q(-\frac{d}{2})\hat{x} + q\frac{d}{2}\hat{x} = 0$$

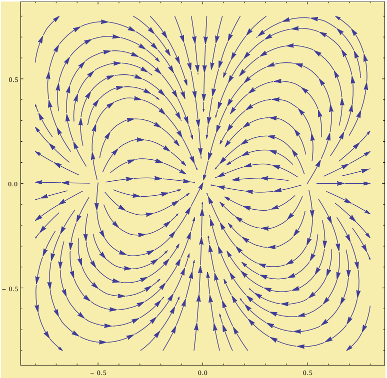
. En este caso tanto Q como $\vec{P}$ son nulos, como se escribirá el potencial? Recuerden que estamos escribiendo el desarrollo multipolar del potencial, el primer término depende de la distancia al origen de coordenadas como $\frac{Q}{r}$, el segundo término va como $\frac{|\vec{P}|}{r^2}$. Que dependencia con r tendrá el próximo término del desarrolo multipolar?

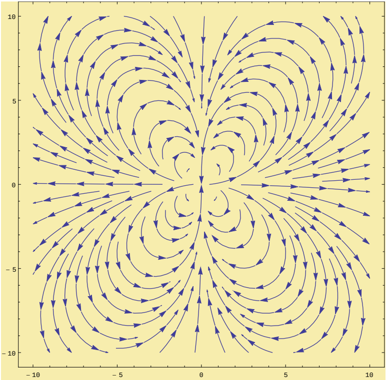
$$\Phi(r) \sim \frac{K}{r^3}$$

y la constante K será el módulo del momento cuadripolar y lo van a estudiar en Fisica Teorica 1.

EJERCICIO 15

Veamos ahora las lineas de campo: Izquierda: cerca de la configuración de cargas; Derecha: lejos de la configuración de cargas.





Ejercicio 16

Dado el campo de un hilo de largo L cargado con densidad lineal uniforme λ, calcular la expresión del campo lejos de la configuración de cargas.

$$\vec{E}(x, y, 0) = \frac{kQ}{r\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + r^2}}\hat{r}$$

Ejercicio 16

Dado el campo de un hilo de largo L cargado con densidad lineal uniforme λ, calcular la expresión del campo lejos de la configuración de cargas.

$$\vec{E}(x, y, 0) = \frac{kQ}{r\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + r^2}}\hat{r}$$

Lejos de la configuración de cargas, $r >> L$, es decir, $\frac{L}{r} << 1$. Entonces podemos escribir:

$$\frac{1}{r\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + r^2}} = \frac{1}{r^2\sqrt{1 + (\frac{L}{2r})^2}}$$

Queremos calcular el campo eléctrico bajo la aproximación $\frac{L}{2r} << 1$.

Recordemos el desarrollo en serie de Taylor para una función $f(x)$ alrededor de un punto x_0

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6!}(x - x_0)^3 \cdots$$

donde $x - x_0$ es una cantidad pequeña.

Paréntesis Matemático

Recordemos el desarrollo en serie de Taylor para una función $f(x)$ alrededor de un punto x_0

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6!}(x - x_0)^3 \cdots$$

donde $x - x_0$ es una cantidad pequeña.
Para el problema que estamos estudiando, :

$$f(x) = (1 + x^2)^{-1/2} \qquad x_0 = 0 \qquad x - x_0 = \frac{L}{2r}$$

Paréntesis Matemático

Recordemos el desarrollo en serie de Taylor para una función $f(x)$ alrededor de un punto x_0

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6!}(x - x_0)^3 \cdots$$

donde $x - x_0$ es una cantidad pequeña.
Para el problema que estamos estudiando, :

$$f(x) = (1 + x^2)^{-1/2} \qquad x_0 = 0 \qquad x - x_0 = \frac{L}{2r}$$

Calculamos las derivadas y evaluamos en x_0

$$f'(x) = -(1 + x^2)^{-3/2}x \qquad f'(x_0) = 0$$

$$f''(x) = 3(1 + x^2)^{-5/2}x - (1 + x^2)^{-3/2} \qquad f''(x_0) = -1$$

Ejercicio 16

De esta manera:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \simeq 1 - \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

Ejercicio 16

De esta manera:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \simeq 1 - \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

Aplicando esta ultima expresión a nuestro problema:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{L}{2r})^2}} \simeq (1 - \frac{L^2}{8r^2})$$

De esta manera:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \simeq 1 - \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

Aplicando esta ultima expresión a nuestro problema:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{L}{2r})^2}} \simeq (1 - \frac{L^2}{8r^2})$$

Finalmente obtenemos la expresión para el campo eléctrico lejos de la configuración de cargas:

$$\vec{E}(x,y,0) = \frac{kQ}{r^2}\,(1 - \frac{L^2}{8r^2})\ \hat{r}$$