

CLASE 11: CORRIENTE

Susana Landau & Andrés Goya



universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

7 de Mayo de 2020

CORRIENTE ESTACIONARIA

En esta guía vamos a estudiar fenómenos que involucran cargas en movimiento estacionario. Con esto nos referimos a sistemas en los cuales las cargas se mueven formando un flujo cuyas características no varían en el tiempo. Se las denomina **corrientes estacionarias**.

Las corrientes eléctricas son electrones u otras partículas cargadas (iones) en movimiento con un flujo neto. Una manera de representar una corriente es mediante un vector \vec{j} que cuantifica la cantidad de carga que atraviesa una superficie por unidad de tiempo y por unidad de área (unidades de $\frac{\text{carga}}{\text{área} \times \text{tiempo}}$). A este vector lo denominaremos **densidad de corriente** \vec{j} .

Si tenemos una superficie $\Delta\vec{S} = \hat{n}\Delta S$, la cantidad de carga que fluye a través de dicha superficie por unidad de tiempo es

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \vec{j} \cdot \hat{n}\Delta S \quad (1)$$

CORRIENTE ESTACIONARIA

Supongamos que tenemos una distribución de cargas ρ que se mueve con velocidad \vec{v} . A medida que se desplaza una cierta cantidad de carga ΔQ atraviesa una dada superficie ΔS en un tiempo Δt . ΔQ es igual a la cantidad de carga contenida en el paralelepípedo de altura $|\vec{v}\Delta t|$ y base ΔS , más precisamente

$$\Delta Q = \rho(\vec{v}\Delta t) \cdot (\hat{n}\Delta S) \quad (2)$$

Entonces la cantidad de carga que atraviesa ΔS por unidad de tiempo es

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho\vec{v} \cdot \hat{n}\Delta S \Rightarrow \vec{j} = \rho\vec{v} \quad (3)$$

donde comparamos con (1) para hacer la la identificación

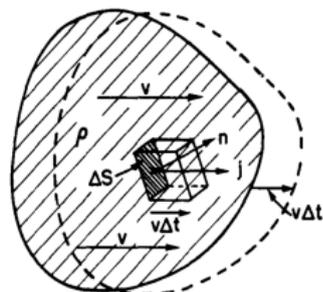


Figura tomada de Feynman Vol II

CORRIENTE ESTACIONARIA

Corriente eléctrica: se la define como la cantidad de carga por unidad de tiempo que atraviesa una dada superficie. Más precisamente

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (4)$$

Ecuación de continuidad:

Si consideramos una superficie cerrada, la variación de la cantidad de carga encerrada $Q_{\text{enc}} = \int \rho d^3x$ es igual al flujo de corriente que sale a través de la superficie, es decir

$$\frac{dQ_{\text{enc}}}{dt} = - \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (5)$$

y utilizando el teorema de Gauss obtenemos la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (6)$$

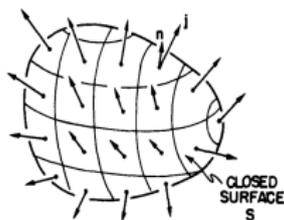


Figura tomada de Feynman Vol II

CORRIENTE ESTACIONARIA

¿A qué nos referimos con corriente **estacionaria**? En el **régimen estacionario** ni la densidad de corriente ni la densidad de carga **dependen explícitamente del tiempo** (puede depender de las coordenadas espaciales), es decir, $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{0}$ y $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Combinando esto último, combinado con la ecuación de continuidad obtenemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (7)$$

No hay puntos de acumulación de cargas, las líneas de \vec{j} bien son cerradas ó van desde infinito hacia infinito.

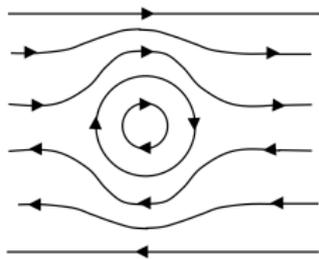
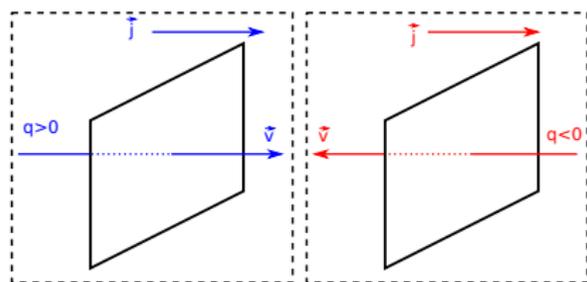


Figura tomada de Zangwill

CORRIENTE ESTACIONARIA: UNIDADES



Ejemplo: si consideramos que todos los portadores son iguales y que N es el número de partículas por unidad de volumen, entonces

$$\vec{j} = qN\vec{v} \quad (8)$$

el sentido de la corriente es contrario al movimiento de los electrones ($q_e = -e < 0$) en un circuito.

Unidades: Las unidades de corriente son $[I] = \text{C/s}$ lo que se define como *Ampère* A. La densidad de corriente tiene unidades de $[j] = \text{A/m}^2 = \text{C}/(\text{s m}^2)$.

PROBLEMA 5: TUBO DE VACÍO

En el Problema 5 nos dicen que tenemos un tubo de vacío en el cual hay un capacitor de placas paralelas. La placa a potencial negativo se llama *cátodo* y la placa a potencial positivo se llama *ánodo*. Si se somete el cátodo a una temperatura alta éste empieza a emitir electrones que luego son acelerados hacia el ánodo debido a la diferencia de potencial entre las placas del capacitor. Nos piden hallar la densidad de carga ρ y la densidad de corriente \vec{j} .

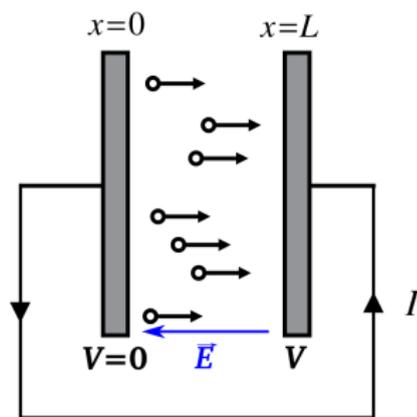
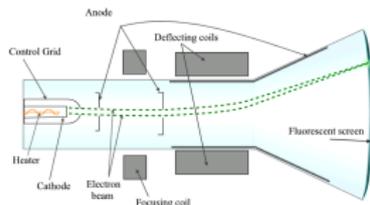


Figura tomada de Zangwill

PROBLEMA 5: TUBO DE VACÍO

Tubo de rayos catódicos (televisores de antes)



Imágenes tomadas de Wikipedia y Diario El País

PROBLEMA 5: TUBO DE VACÍO

Cuando

la temperatura del ánodo es baja se emiten pocos electrones y básicamente la partícula emitida está sometida a un potencial lineal $V \simeq x$ (el correspondiente a un capacitor de placas paralelas, ver curva 1 en la figura).

A medida que se aumenta la temperatura se emiten más y más electrones y no es cierto que cada partícula está sometida únicamente al potencial de las placas sino que hay que tener en cuenta la repulsión entre los electrones mismos. En el problema nos dice que el potencial efectivo es de la forma

$$V(x) = ax^{4/3} \quad (9)$$

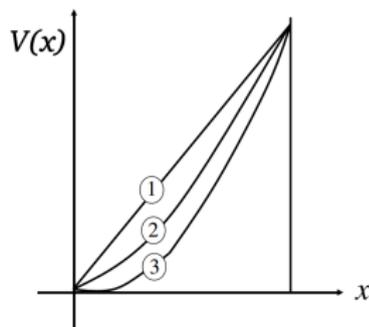


Figura tomada de Zangwill

PROBLEMA 5: TUBO DE VACÍO

Lo primero que vamos a hacer es determinar la velocidad que adquieren los electrones asumiendo que salen del cátodo con velocidad nula $v(x=0) \approx 0$ (despreciamos las componentes en las direcciones transversales). Esto se puede obtener de la ecuación de Newton para cada electrón (usar la regla de la cadena al integrar $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx} \frac{dx}{dt}$)

$$m_e \frac{d^2 v}{dt^2} = F = q_e E(x) = e \frac{dV(x)}{dx} \quad (10)$$

o bien de la conservación de la energía

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = U(x) = -q_e V(x) = eV(x) \quad (11)$$

De cualquiera de las dos expresiones llegamos a

$$v(x) = \sqrt{\frac{2eV(x)}{m_e}} = \sqrt{\frac{2ea}{m_e}} x^{2/3} \quad (12)$$

PROBLEMA 5: TUBO DE VACÍO

Algo interesante de notar es que la densidad de carga ρ no va a ser homogénea dado que $v(x)$ no lo es.

Recordemos que \vec{j} tiene divergencia nula, entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

Entonces dado que $u \sim x^{2/3}$, entonces

$$\rho \sim x^{-2/3} \quad (14)$$

Esto nos dice que la concentración de electrones es mayor cerca del cátodo y es más baja cerca del ánodo. A su vez, la velocidad de los mismos es menor cerca del cátodo y es mayor cerca del ánodo (el campo eléctrico entre las placas los acelera).

PROBLEMA 5: TUBO DE VACÍO

Para terminar de hallar la forma explícita de ρ y de j_x debemos recurrir a la ecuación de Poisson. Recordemos las relaciones entre ρ , V y \vec{E}

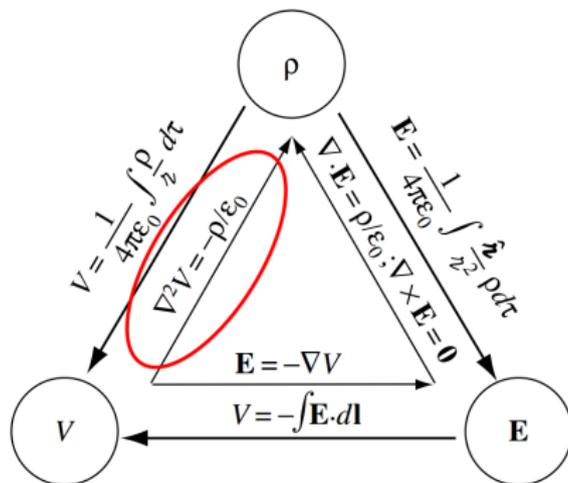


Figura tomada de Griffiths

PROBLEMA 5: TUBO DE VACÍO

Entonces, de la ecuación de Poisson podemos obtener ρ

$$\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 V(x) = -\frac{4\epsilon_0 a}{9x^{2/3}} \quad (15)$$

Notemos que $\rho(x)$ tiene la dependencia que esperábamos.

Finalmente podemos obtener la densidad de corriente

$$j_x = \rho v = -\frac{4\epsilon_0 a}{9x^{2/3}} \sqrt{\frac{2ea}{m_e}} x^{2/3} = -\frac{4\epsilon_0 a^{3/2}}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \quad (16)$$

Que resulta ser constante, lo que es consistente con las hipótesis $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

Como la sección del tubo de vacío es constante, la corriente I es simplemente $I = j_x A$ donde A es el área

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = j_x A = -\frac{4\epsilon_0 a^{3/2}}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} A = \text{const.} \quad (17)$$