Clase 8: Más Sobre Capacitores
Capacidades Equivalentes

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

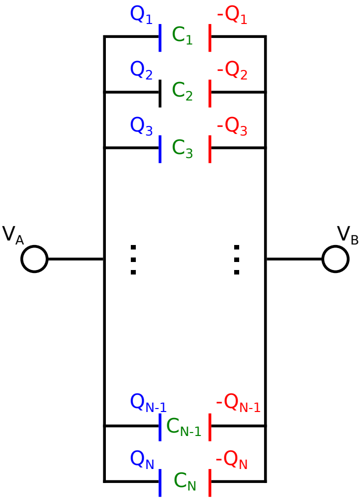
24 de Septiembre de 2020

Capacidad equivalente

En esta clase vamos a seguir estudiando **capacitores**. En este caso vamos a estudiar arreglos de capacitores, es decir, varios capacitores conectados entre sí mediante conductores (cables) formando un circuito. Lo que nos interesa saber es cuánto vale la *capacidad equivalente* entre dos puntos si entre medio hay una dada configuración de capacitores.

Capacitores en paralelo I

Supongamos que tenemos un arreglo de N capacitores conectados a una batería y asumamos que $V_A - V_B > 0$.Se van a inducir cargas positivas en las caras izquierdas (en azul) de los capacitores, lo cual a su vez va a inducir cargas de igual valor pero signo contrario en las caras derechas (en rojo) de los capacitores. Recordemos que la carga Q_i de cada capacitor se puede obtener conociendo su capacidad C_i y la diferencia de potencial V_i a la que está sometido. Notemos que en este caso estamos fijando el potencial del lado izquierdo a V_A y el derecho a V_B.



Capacitores en paralelo II

Al conectar la batería a los bornes A y B, todos los capacitores se encuentran sometidos a la misma diferencia de potencial $\Delta V = V_A - V_B$. Luego, la carga total del sistema es la suma de las cargas de cada uno de los capacitores

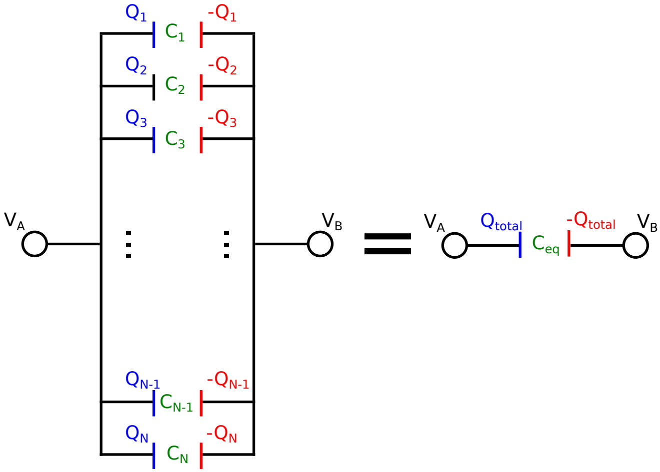
$$Q_{\rm total} = \sum_{i=1}^{N} Q_i = \sum_{i=1}^{N} C_i (V_A - V_B) = (V_A - V_B) \sum_{i=1}^{N} C_i = C_{\rm equiv}(V_A - V_B) \tag{1}$$

donde definimos la **capacidad equivalente en paralelo** como

$$C_{\rm equiv}^{(\text{paralelo})} \equiv \sum_{i=1}^{N} C_i \tag{2}$$

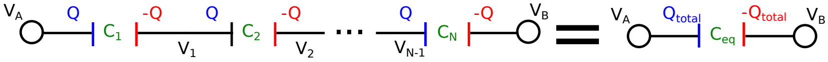
Capacitores en paralelo III

Esquemáticamente estamos viendo el circuito de la primer figura como



Capacitores en serie I

Ahora vamos a seguir un razonamiento análogo pero para capacitores conectados en serie:



Notemos que el conductor que conecta la cara derecha del capacitor C_i y la cara izquierda del capacitor C_{i+1} está aislado, así que la carga total del mismo es cero. Por lo tanto, la carga inducida de un lado y del otro tiene el mismo valor pero signo opuesto.

Capacitores en serie II

La diferencia de potencial entre los bornes A y B es la misma que la suma de las diferencias de potencial entre cada una de las caras de todos los capacitores

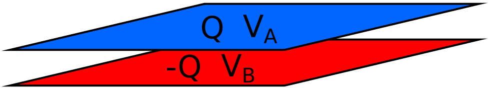
$$
\begin{aligned}
V_A - V_B &= \underbrace{(V_A - V_1)}_{Q/C_1} + \underbrace{(V_1 - V_2)}_{Q/C_2} + \underbrace{(V_2 - V_3)}_{Q/C_3} + \ldots + \underbrace{(V_{N-1} - V_B)}_{Q/C_N} \\
&= Q \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} = \frac{Q}{C_{\text{equiv}}}
\end{aligned} \tag{3}
$$

donde definimos la capacidad equivalente en serie como

$$
\frac{1}{C_{\text{equiv}}^{(\text{serie})}} \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \tag{4}
$$

Energía almacenada en un capacitor

La energía electrostática viene dada por la expresión $U = q\,V$ (unidades $[U] = \mathtt{J}$, $[V] = \mathtt{V} = \mathtt{J}/\mathtt{C}$.

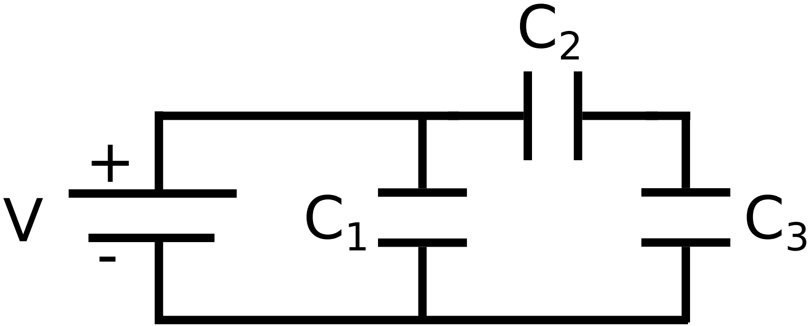


Si tenemos un capacitor formado por dos placas con la placa de arriba a potencial V_A y la placa de abajo a V_B donde $V_A - V_B > 0$, entonces

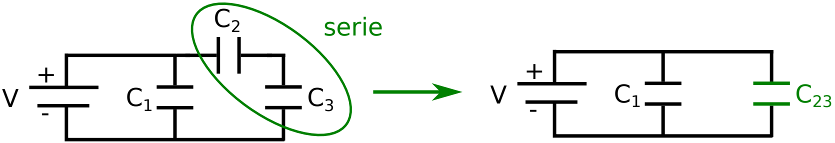
$$U = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q(V_A - V_B) \tag{5}$$

Problema 13 I

El Problema 13 nos pide hallar la capacidad equivalente del siguiente circuito



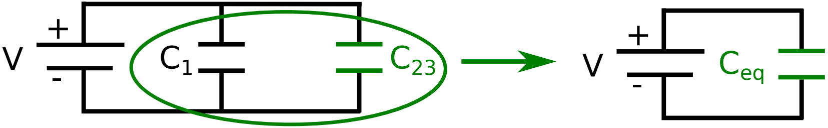
Problema 13 II



Mirando fijamente un rato el circuito anterior podemos notar que C_2 y C_3 están en serie, por lo tanto la capacidad equivalente es

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow C_{23} = \frac{C_2\, C_3}{C_2 + C_3} \tag{6}$$

Problema 13 III

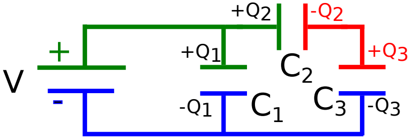


Teninendo este circuito equivalente intermedio, notamos que C_1 y C_{32} están en paralelo y su capacidad equivalente es

$$C_{\mathrm{eq}} = C_1 + C_{23} = C_1 + \frac{C_2\, C_3}{C_2 + C_3} = \frac{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}{C_2 + C_3} \qquad (7)$$

Luego queremos obtener la carga de cada capacitor. Para ello alcanza con recordar que la carga acumulada en un capacitor es el producto de su capacidad por la caída de tensión entre sus caras.

Problema 13 IV

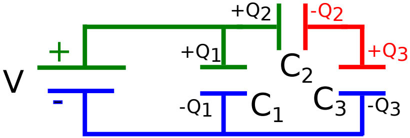


Recordemos que cada conductor es un equipotencial. El conductor **verde** está a potencial V, el **azul** a $V = 0$ y el **rojo** a $V' \neq V$ (aunque no nos piden averiguar el valor de V').

En el capacitor 1 hay una diferencia de potencial V entre su cara superior y su cara inferior, entonces

$$Q_1 = C_1 V \tag{8}$$

Problema 13 V



La diferencia de potencial entre la cara verde del capacitor 2 y la cara azul del capacitor 3 también es V. Notemos además que el conductor rojo está aislado y su carga total es cero, por lo tanto $-Q_2 + Q_3 = 0$. Entonces

$$V = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = Q_2 \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \Rightarrow Q_2 = \frac{C_2\, C_3}{C_2 + C_3} V \tag{9}$$

Problema 13 VI

También nos piden hallar la energía almacenada en el sistema.

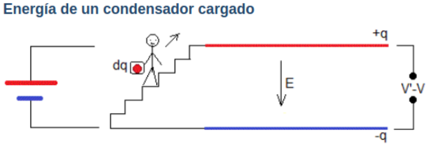


Figura: Fuente: Curso Interactivo de Física en Internet.

Para calcular la energía necesaria para cargar los capacitores del sistema tenemos que integrar el potencial desde $Q = 0$ hasta Q_{total}

$$U = \int_{Q=0}^{Q=Q_{\text{total}}} V dQ = \int_{Q=0}^{Q=Q_{\text{total}}} \frac{Q}{C_{\text{eq}}} dQ = \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{total}}^2}{C_{\text{eq}}} \tag{10}$$

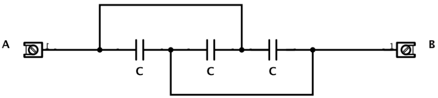
Problema 13 VII

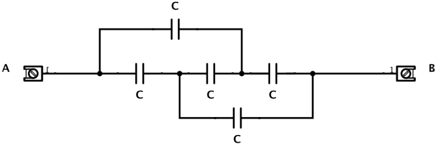
Reemplazando los valores correspondientes de $Q_T = C_{\mathrm{eq}} V$ y de C_{eq} obtenemos que

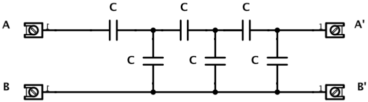
$$U = \frac{1}{2} C_{\mathrm{eq}} V^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}{C_2 + C_3} V^2 \tag{11}$$

Se puede ver que integrando la energía necesaria para cargar cada uno de los capacitores se llega al mismo resultado.

En el Problema 14 nos piden hallar las capacidades equivalentes medidas desde los terminales A y B de los siguientes circuitos

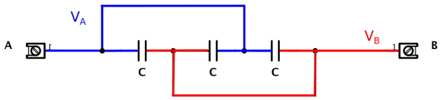




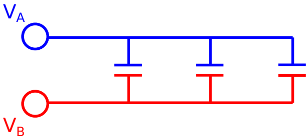


Problema 14 II

Empecemos con el primer circuito. Para hallar la capacidad equivalente va a resultar útil identificar cuales son los conductores que se encuentran al mismo potencial

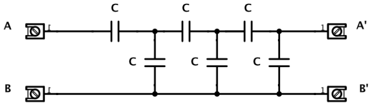


Teniendo esto en cuenta podemos re-dibujar el circuito de la siguiente manera y la capacidad equivalente del circuito sale fácilmente $C_{eq} = 3C$.

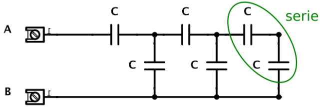


Problema 14 III

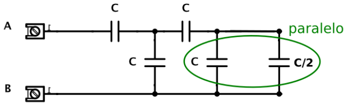
Ahora concentrémonos en el tercer circuito del problema



Nos piden hallar la capacidad viste desde lo terminales A y B, así que nos podemos olvidar por el momento del terminal A' y notemos que el terminal B' está al mismo potencial que el B.
Mirando fijo un rato el circuito notamos que los capacitores que están a la derecha están en serie



Entonces el circuito ahora queda así

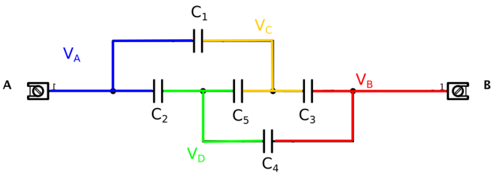


donde ahora podemos identificar dos capacitores que están en paralelo. Siguiendo la misma lógica llegamos a que

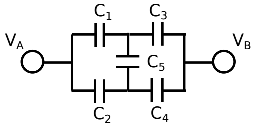
$$C_{\mathrm{eq}} = \frac{8}{13} C \qquad (12)$$

Problema 14 V

Finalmente analicemos el segundo circuito. Nuevamente va a ser útil identificar los capacitores que están a un mismo valor de potencial y ver si eso nos ayuda a dibujar el circuito de una manera más amigable

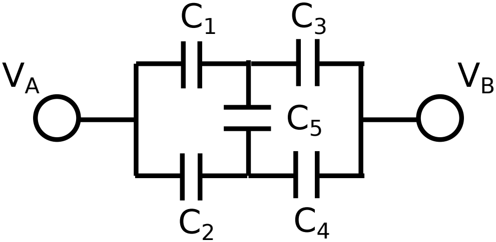


Re-dibujando el circuito nos queda



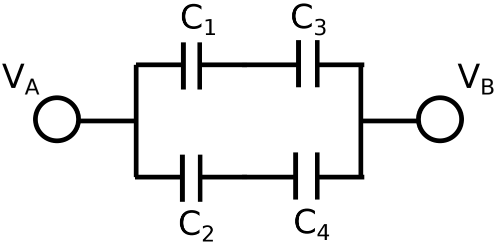
Problema 14 VI

Después de pensarlo un rato nos damos cuenta que no es posible agrupar los capacitores y hallar capacidades equivalentes



Entonces, qué hacemos? Hay que resolver el circuito calculando las cargas inducidas y las diferencias de potencial.

Imagínemonos por un segundo que el capacitor 5 no está



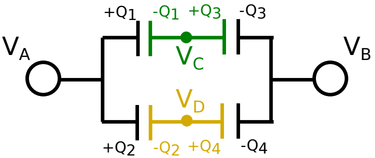
y que se cumplen las siguientes relaciones entre las capacidades (por ahora suena arbitrario pero ya se verá la razón de esto)

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4} = K \tag{13}$$

donde K es una constante.

Problema 14 VIII

Analicemos las cargas inducidas en cada uno de los capacitores

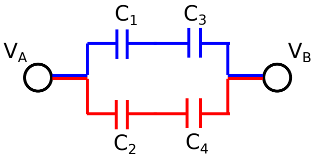


los conductores verde y amarillo están aislados así que se cumple que $Q_1 = Q_3$ y que $Q_2 = Q_4$. Además el conductor verde está a potencial V_C (que lo desconocemos) y el verde a V_D (que tampoco conocemos). Sin embargo podemos escribir cuál es la diferencia de potencial

$$\left.\begin{aligned} V_A - V_C &= Q_1/C_1 \\ V_A - V_D &= Q_2/C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_C - V_D = -Q_1/C_1 + Q_2/C_2 \qquad (14)$$

Problema 14 IX

Ahora calculamos la diferencia de potencial entre las terminales A y B por dos caminos distintos



Por el camino azul tenemos

$$V_A - V_B = Q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} Q_1 \tag{15}$$

y por el camino rojo

$$V_A - V_B = Q_2 \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_4} \right) = \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} Q_2 \tag{16}$$

Problema 14 X

Tomando el cociente de las dos expresiones anteriores tenemos podemos obtener la siguiente relación

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2}\frac{C_3}{C_4}\frac{(C_2 + C_4)}{C_1 + C_3} \tag{17}$$

si recordamos la relación de proporcionalidad $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4} = K$ y la reemplazamos en la expresión anterior llegamos a que

$$\frac{Q_1}{Q_2} = K \tag{18}$$

Entonces la diferencia de potencial entre C y D es

$$V_C - V_D = -Q_1/C_1 + Q_2/C_2 = -\frac{KQ_2}{KC_2} + Q_2/C_2 = 0 \tag{19}$$

Problema 14 XI

es decir, no hay diferencia de potencial entre esos puntos. Si colocamos un capacitor que una esos dos puntos no se va a cargar.

Notemos que el caso en que todas las capacidades son iguales cumple trivialmente la relación $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4} = K$, por lo tanto en el segundo circuito del Problema 14 el capacitor C_5 no juega ningún rol. Es fácil ahora calcular la capacidad equivalente entre los terminales A y B. Les queda de tarea.