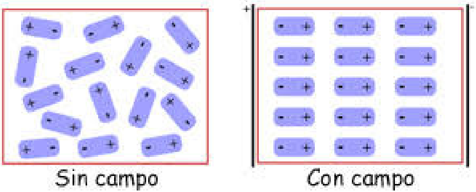
Clase 9: Medios dieléctricos

Susana J. Landau & Andres Goya

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

1 de junio de 2020

Un material dieléctrico ideal es aquel que no tiene cargas libres.



Un campo eléctrico externo, produce una fuerza sobre las partículas cargadas de manera tal, que las cargas positivas se alinean en la dirección del campo y las cargas negativas se alinean en dirección opuesta al mismo. Otra manera de expersarlo es que el material dieléctrico se polariza en presencia de un campo eléctrico externo. Para describir la polarización se utiliza el vector de polarización $\vec{P}$. Cuando el medio dieléctrico es lineal:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi(E) \vec{E} \tag{1}$$

donde χ se denomina susceptibilidad eléctrica.

En presencia de campos eléctricos externos, en los materiales dieléctricos, se van a generar cargas de polarización que se definen de la siguiente manera:

$$\rho_P = -\vec{\nabla}.\vec{P} \qquad\qquad \sigma_P = \vec{P}.\hat{n} \tag{2}$$

Una herramienta matemática útil es el vector desplazamiento eléctrico:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{3}$$

De acuerdo a su definición $\vec{D}$ y como $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ se cumple la siguiente ecuació:

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{P} \tag{4}$$

A su vez, si recordamos que $\vec{\nabla}.\vec{E} = \dfrac{\rho_T}{\epsilon_0} = \dfrac{\rho_L + \rho_P}{\epsilon_0}$, se cumple que:

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho_L \tag{5}$$

De esta manera se puede expresar la ley de Gauss en medios dieléctricos:

$$\int\int \vec{D}.\hat{n}\, dS = Q_L \tag{6}$$

Medios dieléctricos

Las ecuaciones que cumple $\vec{D}$ son:

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho_L \qquad \vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{P} \tag{7}$$

y las ecuaciones que cumple $\vec{E}$ son:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho_T}{\epsilon_0} = \frac{\rho_L + \rho_P}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{8}$$

La siguiente tabla resume las fuentes de $\vec{E}$ y $\vec{D}$ en volumen y superficie:

	Volumen	Superficie
$\vec{D}$	$\rho_L \quad \vec{\nabla} \times \vec{P}$	$\sigma_L \quad \vec{P} \times \hat{n}$
$\vec{E}$	$\rho_T = \rho_L + \rho_P$	$\sigma_T = \sigma_L + \sigma_P$

donde $\rho_p = -\vec{\nabla}.\vec{P}$ y $\sigma_P = \vec{P}.\hat{n}$ y $\hat{n}$ es la normal exterior al medio dieléctrico.

Medios dieléctricos

En medios lineales:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi(\vec{E})\vec{E} \tag{9}$$
$$\vec{D} = \epsilon(\vec{E})\vec{E} \tag{10}$$

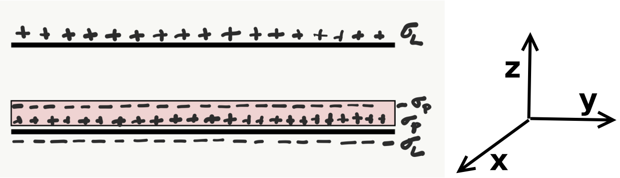
donde ϵ es la permitividad eléctrica donde en el caso más general χ y ϵ son tensores que dependen del campo eléctrico. De acuerdo a sus definiciones la relación entre ϵ y χ es :

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi) \tag{11}$$

A su vez, si el medio es lineal e isótropo, χ y ϵ son escalares que dependen del campo eléctrico externo. Si, además el medio es lineal, isótropo y homogéneo:

$$\chi = \text{cte} \qquad\qquad \epsilon = \text{cte} \tag{12}$$

Problema 16



Como el medio es lineal, isótropo y homogéneo, podemos escribir:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \tag{13}$$

donde en este caso especial χ es una constante, Entonces, ocurre que $\vec{\nabla} \times \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Entonces, las ecuaciones para $\vec{D}$ son:

$$\vec{\nabla} . \vec{D} = \rho_L \tag{14}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0 \tag{15}$$

son las mismas ecuaciones que tendríamos para el campo eléctrico para un capacitor cargado con Q_L.

Problema 16

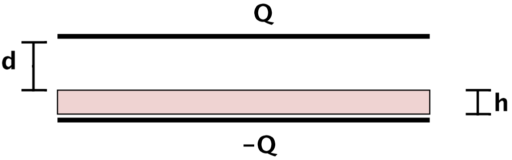
Entonces podemos usar la ley de Gauss para encontrar $\vec{D}$:

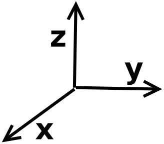
$$\int\int \vec{D}.d\vec{S} = Q_L \tag{16}$$

De esta manera (ver ley de Gauss clase 2) obtenemos la expresión para $\vec{D}$ de un plano conductor infinito cargado con σ_L:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma_L}{2}\,\hat{z} & z > 0 \\ -\frac{\sigma_L}{2}\,\hat{z} & z < 0\,. \end{cases}$$

Problema 16

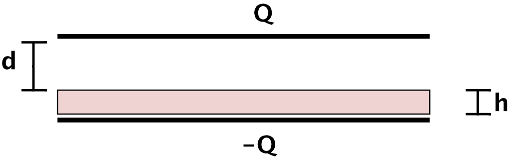


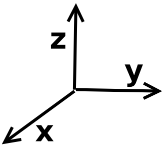


Aplicando el principio de superposición, encontramos el campo $\vec{D}$ para dos planos conductores infinitos cargados con σ_L y $-\sigma_L$ y ubicados a una distancia $d+h$:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} -\sigma_L\ \hat{z} & 0 < z < d+h \\ 0 & z < 0 \quad o \quad z > d+h\,. \end{cases}$$

Problema 16





Como el medio el lineal, isótropo y homogéneo $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ y entonces:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_L}{\epsilon}\,\hat{z} & 0 < z < h \\ -\dfrac{\sigma_L}{\epsilon_0}\,\hat{z} & h < z < h + d \\ 0 & z < 0 \;\; o \;\; z > d + h\,. \end{cases}$$

Problema 16

Ahora podemos calcular $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} -\sigma_L \left(1 - \dfrac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{z} & 0 < z < h \\ 0 & z < 0 \;\; o \;\; z > h\,. \end{cases}$$

Ahora podemos calcular las cargas de polarización, $\sigma_p = \vec{P}.\hat{n}$ donde $\hat{n}$ son las normales a las dos superficies del dieléctrico. Entonces, tenemos dos cargas de polarización, una ubicada en $z = 0$

$$\sigma_p = -\sigma_L \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{z}.(-\hat{z}) = \sigma_L \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)$$

y la otra en $z = h$:

$$\sigma_p = -\sigma_L \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{z}.\,\hat{z} = -\sigma_L \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)$$

Problema 16

A continuación calculamos la capacidad $C = \frac{Q_L}{\Delta V}$, para eso, primera calculamos :

$$\Delta V = -\int \vec{E}.\vec{dl} = \int_0^h \frac{\sigma_L}{\epsilon} \hat{z}.\hat{z}\, dz + \int_h^{h+d} \frac{\sigma_L}{\epsilon_0} \hat{z}.\hat{z}\, dz$$

Problema 16

A continuación calculamos la capacidad $C = \frac{Q_L}{\Delta V}$, para eso, primera calculamos :

$$\begin{aligned}\Delta V &= -\int \vec{E}.\vec{dl} = \int_0^h \frac{\sigma_L}{\epsilon}\hat{z}.\hat{z}\,dz + \int_h^{h+d} \frac{\sigma_L}{\epsilon_0}\hat{z}.\hat{z}\,dz \\ &= \frac{\sigma_L}{\epsilon}h + \frac{\sigma_L}{\epsilon_0}d\end{aligned}$$

Problema 16

A continuación calculamos la capacidad $C = \frac{Q_L}{\Delta V}$, para eso, primera calculamos :

$$\begin{aligned} \Delta V &= -\int \vec{E}.\vec{dl} = \int_0^h \frac{\sigma_L}{\epsilon} \hat{z}.\hat{z}\, dz + \int_h^{h+d} \frac{\sigma_L}{\epsilon_0} \hat{z}.\hat{z}\, dz \\ &= \frac{\sigma_L}{\epsilon} h + \frac{\sigma_L}{\epsilon_0} d \end{aligned}$$

Y de esta manera obtenemos:

$$C = \frac{Q_L}{\Delta V} = \frac{\sigma_L A}{\Delta V} = \frac{A}{\frac{h}{\epsilon} + \frac{d}{\epsilon_0}}$$

donde A es el área del capacitor. Recordemos que el problema plantea despreciar los efectos de borde para calcular los campos, pero se trata de capacitores finitos.

Problema 16

Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

$$U \;=\; \frac{1}{2}\int_V \vec{D}.\vec{E}\; dV$$

Problema 16

Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\int_V \vec{D}.\vec{E}\; dV \\
&= \frac{1}{2}\int_0^h \int_A (-\sigma_L \hat{z})\,.\,(-\frac{\sigma_L}{\epsilon}\,\hat{z})\; dA\; dz + \\
&\quad \frac{1}{2}\int_h^{h+d} \int_A (-\sigma_L\,\hat{z})\,.\,(-\frac{\sigma_L}{\epsilon_0}\,\hat{z})\; dA\; dz
\end{aligned}
$$

Problema 16

Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

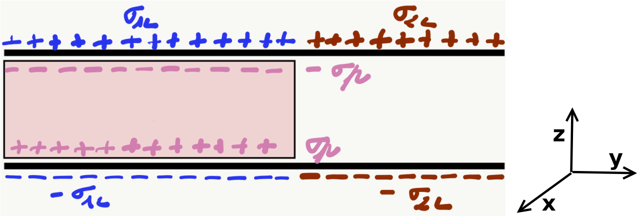
$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\int_V \vec{D}.\vec{E}\, dV \\
&= \frac{1}{2}\int_0^h \int_A (-\sigma_L \hat{z})\,.\,(-\frac{\sigma_L}{\epsilon}\,\hat{z})\; dA\; dz + \\
&\quad \frac{1}{2}\int_h^{h+d} \int_A (-\sigma_L\,\hat{z})\,.\,(-\frac{\sigma_L}{\epsilon_0}\,\hat{z})\; dA\; dz \\
&= \frac{1}{2}\sigma_L^2 A\left(\frac{h}{\epsilon}+\frac{d}{\epsilon_0}\right)
\end{aligned}
$$

Problema 16

Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\int_V \vec{D}.\vec{E}\; dV \\
&= \frac{1}{2}\int_0^h \int_A (-\sigma_L \hat{z})\,.\,(-\frac{\sigma_L}{\epsilon}\,\hat{z})\; dA\; dz + \\
&\quad \frac{1}{2}\int_h^{h+d} \int_A (-\sigma_L\,\hat{z})\,.\,(-\frac{\sigma_L}{\epsilon_0}\,\hat{z})\; dA\; dz \\
&= \frac{1}{2}\sigma_L^2 A\left(\frac{h}{\epsilon}+\frac{d}{\epsilon_0}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{Q_L^2}{C} = \frac{1}{2}Q_L\Delta V = \frac{1}{2}C\Delta V^2
\end{aligned}
$$

Problema 16

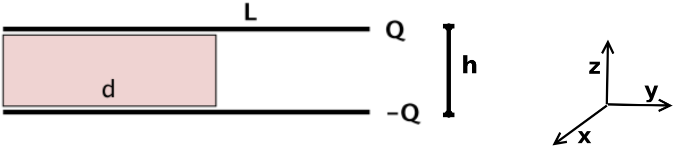


En este problema, las cargas se van a distribuir en la superficie del conductor de manera diferente según estén próximas o no al material dieléctrico. En este problema nuevamente tenemos un medio dieléctrico lineal isótropo y homogéneo y por tanto $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ y entonces $\vec{\nabla} \times \vec{P} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \epsilon_0 \, \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad = \quad 0$$
$$\vec{\nabla} . \vec{D} = \rho_L$$

Al igual que en el problema anterior, podemos usar los resultados que obtuvimos usando la ley de Gauss para el campo eléctrico:

Problema 16



$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} -\sigma_{1L}\ \hat{z} & 0 < z < h \ \ y \ \ 0 < y < d \\ -\sigma_{2L}\ \hat{z} & 0 < z < h \ \ y \ \ d < y < L \\ 0 & z < 0 \ \ o \ \ z > h\,. \end{cases}$$

No sabemos aún cuanto valen σ_{1L} y σ_{2L}. Como $\vec{E} = \epsilon\vec{D}$, obtenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_{1L}}{\epsilon}\ \hat{z} & 0 < z < h \ \ y \ \ 0 < y < d \\ \\ -\dfrac{\sigma_{2L}}{\epsilon_0}\ \hat{z} & 0 < z < h \ \ y \ \ d < y < L \\ 0 & z < 0 \ \ o \ \ z > h\,. \end{cases}$$

Problema 16

Ahora bien, sabemos que la diferencia de tensión (ΔV) entre ambas placas del capacitor, tiene que ser igual, si el camino para calcularla es el dieléctrico o el vacío, es decir:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2$$

Problema 16

Ahora bien, sabemos que la diferencia de tensión (ΔV) entre ambas placas del capacitor, tiene que ser igual, si el camino para calcularla es el dieléctrico o el vacío, es decir:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= \Delta V_2 \\ \int_0^h \frac{\sigma_{1L}}{\epsilon}\, dz &= \int_0^h \frac{\sigma_{2L}}{\epsilon_0}\, dz \end{aligned}$$

Problema 16

Ahora bien, sabemos que la diferencia de tensión (ΔV) entre ambas placas del capacitor, tiene que ser igual, si el camino para calcularla es el dieléctrico o el vacío, es decir:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= \Delta V_2 \\ \int_0^h \frac{\sigma_{1L}}{\epsilon}\, dz &= \int_0^h \frac{\sigma_{2L}}{\epsilon_0}\, dz \\ \sigma_{1L} &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\sigma_{2L} \end{aligned}$$

Problema 16

Ahora bien, sabemos que la diferencia de tensión (ΔV) entre ambas placas del capacitor, tiene que ser igual, si el camino para calcularla es el dieléctrico o el vacío, es decir:

$$\begin{aligned}
\Delta V_1 &= \Delta V_2 \\
\int_0^h \frac{\sigma_{1L}}{\epsilon}\, dz &= \int_0^h \frac{\sigma_{2L}}{\epsilon_0}\, dz \\
\sigma_{1L} &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\sigma_{2L}
\end{aligned}$$

A su vez, conocemos el valor de $Q_L = \sigma_L A$ donde A es el área de cada una de las placas del capacitor.

$$\sigma_L = \frac{\sigma_{1L} d + \sigma_{2L}(L - d)}{L}$$

Problema 16

Ahora bien, sabemos que la diferencia de tensión (ΔV) entre ambas placas del capacitor, tiene que ser igual, si el camino para calcularla es el dieléctrico o el vacío, es decir:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= \Delta V_2 \\ \int_0^h \frac{\sigma_{1L}}{\epsilon}\, dz &= \int_0^h \frac{\sigma_{2L}}{\epsilon_0}\, dz \\ \sigma_{1L} &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\sigma_{2L} \end{aligned}$$

A su vez, conocemos el valor de $Q_L = \sigma_L A$ donde A es el área de cada una de las placas del capacitor.

$$\begin{aligned} \sigma_L &= \frac{\sigma_{1L} d + \sigma_{2L}(L-d)}{L} \\ &= \frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\sigma_{2L} d + \sigma_{2L}(L-d)}{L} \end{aligned}$$

Problema 16

De esta manera obtenemos:

$$\sigma_{2L} = \frac{\sigma_L L \epsilon_0}{\epsilon d + \epsilon_0 (L - d)}$$

$$\sigma_{1L} = \frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0 (L - d)}$$

Problema 16

De esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sigma_{2L} &= \frac{\sigma_L L \epsilon_0}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)} \\
\sigma_{1L} &= \frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)}
\end{aligned}$$

Y de esta manea podemos escribir la expresión final para $\vec{D}$, $\vec{E}$ y $\vec{P}$:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)}\,\hat{z} & 0 < z < h \;\; y \;\; 0 < y < d \\ -\frac{\sigma_L L \epsilon_0}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)}\,\hat{z} & 0 < z < h \;\; y \;\; d < y < L \\ 0 & z < 0 \;\; o \;\; z > h\,. \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)}\,\hat{z} & 0 < z < h \\ 0 & z < 0 \;\; o \;\; z > h\,. \end{cases}$$

Problema 16

Y ahora calculamos $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}$:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{z} & 0 < z < h \;\; y \; 0 < y < d \\ 0 & z < 0 \;\; o \;\; z > h \;\; o \;\; 0 < z < h \; y \; d < y < L \end{cases}$$

Problema 16

Y ahora calculamos $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}$:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{z} & 0 < z < h \;\; y \; 0 < y < d \\ 0 & z < 0 \;\; o \;\; z > h \;\; o \;\; 0 < z < h \; y \; d < y < L \end{cases}$$

A su vez, podemos calcular las cargas superficiales de polarización $\sigma_p = \vec{P}.\hat{n}$. Para $z = 0$ y $0 < y < d$:

$$\sigma_p = -\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) .(-\hat{z}) = \frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)$$

Problema 16

Y ahora calculamos $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}$:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{z} & 0 < z < h \;\; y \; 0 < y < d \\ 0 & z < 0 \;\; o \;\; z > h \;\; o \;\; 0 < z < h \; y \; d < y < L \end{cases}$$

A su vez, podemos calcular las cargas superficiales de polarización $\sigma_p = \vec{P}.\hat{n}$. Para $z = 0$ y $0 < y < d$:

$$\sigma_p = -\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) .(-\hat{z}) = \frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)$$

y para $z = h$ y $0 < y < d$:

$$\sigma_p = -\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) . \hat{z} = -\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)$$

Problema 16

Vamos a calcular ahora la capacidad $C = \frac{Q_L}{\Delta V}$; entonces primero calculamos:

$$\Delta V \;\; = \;\; -\int \vec{E} \, . \, \vec{dl} = \int_0^h \frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)} \; \hat{z} \; dz \; . \; \hat{z} dz$$

Problema 16

Vamos a calcular ahora la capacidad $C = \frac{Q_L}{\Delta V}$; entonces primero calculamos:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= -\int \vec{E} \,.\, \vec{dl} = \int_0^h \frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)} \; \hat{z} \; dz \;.\; \hat{z} dz \\
&= \frac{\sigma_L L h}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)}
\end{aligned}$$

Problema 16

Vamos a calcular ahora la capacidad $C = \frac{Q_L}{\Delta V}$; entonces primero calculamos:

$$\begin{aligned} \Delta V &= -\int \vec{E}\ .\ \vec{dl} = \int_0^h \frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)}\ \hat{z}\ dz\ .\ \hat{z} dz \\ &= \frac{\sigma_L L h}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)} \end{aligned}$$

Y ahora si podemos obtener la capacidad:

$$C = \frac{Q_L}{\Delta V} = \frac{\sigma_L A}{h \sigma_L L}\left[\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)\right] = \frac{A}{hL}\left[\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)\right]$$

Problema 16

Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}.\vec{E}\, dV$$

Problema 16

Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_V \vec{D}.\vec{E}\, dV \\ &= \frac{1}{2}\int_0^h \int_0^d \int_0^{L'} (-\frac{\sigma_L L\epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)}\ \hat{z})\ .\ (-\frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)}\ \hat{z})\ dxdydz \end{aligned}$$

Problema 16

Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\int_V \vec{D}.\vec{E}\; dV \\
&= \frac{1}{2}\int_0^h \int_0^d \int_0^{L'} (-\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)}\ \hat{z})\ .\ (-\frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)}\ \hat{z})\ dxdydz \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^h \int_d^L \int_0^{L'} (-\frac{\sigma_L L \epsilon_0}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)}\ \hat{z})\ .\ (-\frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0 (L-d)}\ \hat{z})\ dxdydz
\end{aligned}
$$

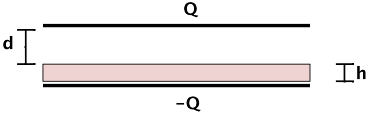
Problema 16

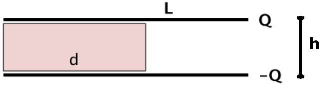
Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\int_V \vec{D}.\vec{E}\; dV \\
&= \frac{1}{2}\int_0^h \int_0^d \int_0^{L'} (-\frac{\sigma_L L\epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)}\;\hat{z})\;.\;(-\frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)}\;\hat{z})\; dxdydz \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^h \int_d^L \int_0^{L'} (-\frac{\sigma_L L\epsilon_0}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)}\;\hat{z})\;.\;(-\frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)}\;\hat{z})\; dxdydz \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sigma_L^2 L^2 \epsilon L' h d}{[\epsilon d + \epsilon_0(L-d)]^2} + \frac{1}{2}\frac{\sigma_L^2 L^2 \epsilon_0 L' h (L-d)}{[\epsilon d + \epsilon_0(L-d)]^2}
\end{aligned}$$

Problema 16

Por útimo una observación:

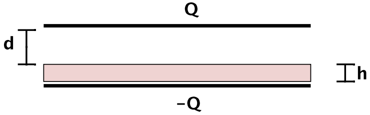


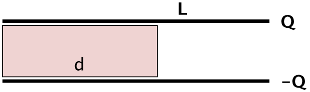


Si miramos con atención podemos ver que en el caso del capacitor de la izquierda, lo podemos pensar como dos capacitores en serie, uno que se encuentra en $0 < z < h$ y otro que se encuentra en $h < z < d + h$. Mientras que si miramos con atención el circuito de la derecha, lo podemos pensar como dos capacitores en paralelo, uno se encuentra en $0 < y < d$ y el otro $d < y < L$.

Problema 16

Por útimo una observación:





Recordemos la capacidad para ambos capacitores: para el capacitor de la izquierda

$$C = \frac{A}{\frac{h}{\epsilon} + \frac{d}{\epsilon_0}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

y para el capacitor de la derecha

$$C = \frac{A}{hL}\left[\epsilon d + \epsilon_0 (L - d)\right] = C_1 + C_2$$

Las ecuaciones que cumple $\vec{D}$ son:

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho_L \qquad \vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{P} \tag{19}$$

y las ecuaciones que cumple $\vec{E}$ son:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \rho_T = \rho_L + \rho_P \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{20}$$

La siguiente tabla resume las fuentes de $\vec{E}$ y $\vec{D}$ en volumen y superficie:

	Volumen	Superficie
$\vec{D}$	$\rho_L \quad \vec{\nabla} \times \vec{P}$	$\sigma_L \quad \vec{P} \times \hat{n}$
$\vec{E}$	$\rho_T = \rho_L + \rho_P$	$\sigma_T = \sigma_L + \sigma_P$

donde $\rho_p = -\vec{\nabla}.\vec{P}$ y $\sigma_P = \vec{P}.\hat{n}$ y $\hat{n}$ es la normal exterior al medio dieléctrico.