Clase 14: Magnetostática

Susana J. Landau & Andres Goya

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

11 de junio de 2020

Esquema de la clase

- Ley de Biot-Savart: Campo magnético de una espira circular y una espira cuadrada. Expresión del campo en el límite de grandes distancias
- Fuerza de Lorentz: Fuerza entre un hilo y una cinta.

Ley de Biot-Savart

El campo magnético generado por una corriente I se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l'} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \tag{1}$$

donde

- $\vec{r}$ es el punto campo (donde queremos calcular el campo magnético).
- $\vec{r'}$ es el punto fuente (donde está la corriente fuente del campo magnético).
- $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$ es la permeabilidad del vacío.
- Las unidades del campo magnético son los Tesla $= \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}}$.

Cuando la fuente del campo magnético es una distribución de corriente en volumen $\vec{j}$, el campo magnético se puede expresar de la siguiente manera:

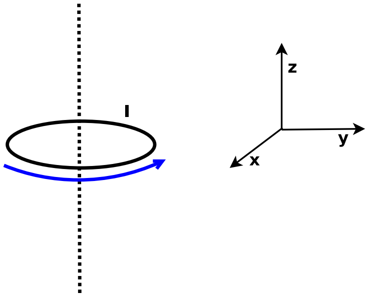
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\, dV' \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \tag{2}$$

mientras que si la fuente del campo magnético es una distribución de corriente en superficie $\vec{g}$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{g}\, dS' \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \tag{3}$$

PROBLEMA 6

Calcular el campo magnético sobre el eje de una espira circular de área A y corriente I. El radio de la espira es $a = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$



Vamos a usar la Ley de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\vec{dl'} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

- $\vec{r} = (0, 0, z) = z\hat{z}$
- $\vec{r'} = (a\cos\phi, a\,\mathrm{sen}\,\phi, 0) = a\hat{r}$
- $\vec{dl'} = a\,d\phi\,\hat{\phi}$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \vec{dl'} \times (\vec{r} - \vec{r'}) &= a\,d\phi\,\hat{\phi} \times (z\hat{z} - a\hat{r}) \\ &= a\,z\,d\phi\,\hat{r} + a^2\,d\phi\,\hat{z} \end{aligned}$$

Problema 6

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I(a\,z\,d\phi\,\hat{r} + a^2\,d\phi\,\hat{z})}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

Recordemos que $\hat{r} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ y que $\int_0^{2\pi}\cos\phi\,d\phi = \int_0^{2\pi}\sin\phi\,d\phi = 0$, entonces obtenemos el campo de una espira circular sobre el eje z:

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I a^2\,d\phi\,\hat{z}}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

Problema 6

Veamos ahora cuál es la expresión a la cual podemos aproximar el campo magnético para distancias grandes, es decir $z >> a$. Podemos escribir

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3(1+\frac{a^2}{z^2})^{3/2}}\hat{z}$$

LLamando $x = \frac{a}{z}$, vamos a hacer un desarrollo de Taylor de la función $f(x) = (1+x^2)^{-3/2}$ alrededor de $x_0 = 0$ y con $x - x_0 = \epsilon = \frac{a}{z}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x^2)^{-3/2} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -3x(1+x^2)^{-5/2} & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= 15x(1+x^2)^{-7/2} - 3(1+x^2)^{-5/2} & f''(0) &= -3 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $(1+x^2)^{-3/2} \simeq 1 - 3\epsilon^2$:

$$\frac{1}{(1+\frac{a^2}{z^2})^{3/2}} \simeq 1 - 3\frac{a^2}{z^2}$$

Problema 6

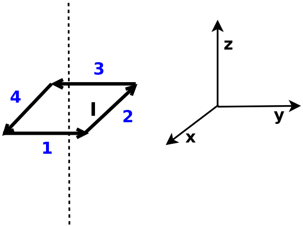
$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}(1-3\frac{a^2}{z^2})\hat{z}$$

$$\simeq \frac{\mu_0 I A}{2\pi z^3}(1-3\frac{a^2}{z^2})\hat{z}$$

donde recordemos que A es el área de la espira.

Problema 6

Calcular el campo magnético sobre el eje de una espira cuadrada de lado D y corriente I.



Vamos a aplicar
la ley de Biot-Savart a cada uno de los lados de la espira cuadrada, recorriéndola en sentido antihorario. Empecemos por el lado 1, donde tenemos:

- $\vec{r} = (0, 0, z)$
- $\vec{r'} = (\frac{D}{2}, y', 0)$
- $d\vec{l}' = dy'\hat{y}$

$$\vec{B}_1(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-D/2}^{D/2} \frac{I dy' \hat{y} \times (-\frac{D}{2}, -y', z)}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

Problema 6

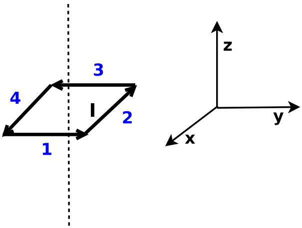
$$\vec{B}_1(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-D/2}^{D/2} \frac{I dy'\hat{y} \times (-\frac{D}{2}, -y', z)}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

Haciendo el producto vectorial obtenemos

$$\begin{aligned}
\vec{B}_1(0,0,z) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-D/2}^{D/2} \frac{I \frac{D}{2} dy' \hat{z}}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}} \\
&\quad \underbrace{+ \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-D/2}^{D/2} \frac{I z dy' \hat{x}}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}}}_{A} \\
&= \frac{\mu_0 D I}{8\pi} \frac{y' \, \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2}}\Bigg|_{-D/2}^{D/2} + A
\end{aligned}$$

Problema 6

$$\vec{B}_1(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \frac{D^2\ \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}} + A$$



Vamos a aplicar la
ley de Biot-Savart al lado 2, donde tenemos:

- $\vec{r} = (0,0,z) = z\hat{z}$
- $\vec{r'} = (x', \frac{D}{2}, 0)$
- $d\vec{l}' = dx'\hat{x}$

$$\vec{B}_2(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D/2}^{-D/2} \frac{I dx'\hat{x} \times (-x', -\frac{D}{2}, z)}{\left[x'^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

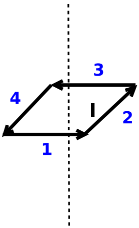
Problema 6

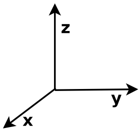
$$\vec{B}_2(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{D/2}^{-D/2} \frac{I dx' \hat{x} \times (-x', -\frac{D}{2}, z)}{\left[x'^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

Haciendo el producto vectorial obtenemos:

$$\begin{aligned}
\vec{B}_2(0,0,z) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{D/2}^{-D/2} \frac{I(-\frac{D}{2}) dx' \hat{z}}{\left[x'^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2\right]^{3/2}} \\
&\quad \underbrace{+ \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{D/2}^{-D/2} \frac{I(-z) dx' \hat{y}}{\left[x'^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2\right]^{3/2}}}_{B} \\
&= \frac{\mu_0 D I}{8\pi} \frac{(-x)\,\hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\sqrt{\left(x'^2 + \frac{D}{2}\right)^2 + z^2}}\Big|_{D/2}^{-D/2} + B
\end{aligned}$$

$$\vec{B}_2(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \frac{D^2\ \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}} + B$$





Vamos a aplicar la
ley de Biot-Savart al lado 3, donde tenemos:

- $\vec{r} = (0,0,z) = z\hat{z}$
- $\vec{r'} = (-\frac{D}{2}, y', 0)$
- $\vec{dl'} = dy'\hat{y}$

$$\vec{B}_3(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{D/2}^{-D/2} \frac{I dy'\hat{y} \times (\frac{D}{2}, -y', z)}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

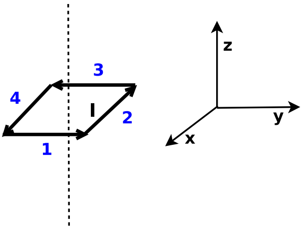
Problema 6

$$\vec{B}_3(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{D/2}^{-D/2} \frac{I dy' \hat{y} \times (\frac{D}{2}, -y', z)}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

Resolviendo el producto vectorial obtenemos:

$$\begin{aligned}\vec{B}_3(0,0,z) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{D/2}^{-D/2} \frac{I(-\frac{D}{2}) dy' \hat{z}}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}} \\ &\quad \underbrace{+ \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{D/2}^{-D/2} \frac{I z dy' \hat{x}}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}}}_{C} \\ &= \frac{\mu_0 D I}{8\pi} \frac{-y' \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2}} \Big|_{D/2}^{-D/2} + C\end{aligned}$$

$$\vec{B}_3(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \frac{D^2\,\hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}} + C$$



Vamos a aplicar la
ley de Biot-Savart al lado 4, donde tenemos:

- $\vec{r} = (0,0,z) = z\hat{z}$
- $\vec{r'} = (x', -\frac{D}{2}, 0)$
- $\vec{dl'} = dx'\hat{x}$

$$\vec{B}_4(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-D/2}^{D/2} \frac{I dx'\hat{x} \times (-x', \frac{D}{2}, z)}{\left[x'^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

Problema 6

$$\vec{B}_4(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-D/2}^{D/2} \frac{I dx'\hat{x} \times (-x', \frac{D}{2}, z)}{\left[x'^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

Haciendo el producto vectorial obtenemos:

$$\begin{aligned}
\vec{B}_4(0,0,z) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-D/2}^{D/2} \frac{I\frac{D}{2} dx'\hat{z}}{\left[x'^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2\right]^{3/2}} \\
&\quad \underbrace{+ \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-D/2}^{D/2} \frac{I(-z) dx'\hat{y}}{\left[x'^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2\right]^{3/2}}}_{D} \\
&= \frac{\mu_0 DI}{8\pi} \frac{x\,\hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\sqrt{\left(x'^2 + \frac{D}{2}\right)^2 + z^2}}\Bigg|_{-D/2}^{D/2} + D
\end{aligned}$$

Problema 6

$$\vec{B}_4(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \frac{D^2 \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right] \sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}} + D$$

Se puede ver que $A + C = 0$ y $B + D = 0$ y el campo magnético total de la espira cuadrada es:

$$\vec{B}_T(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{D^2 \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right] \sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}}$$

Problema 6

Veamos ahora la expresión del campo magnético para distancias grandes, es decir $z >> D$. Podemos escribir:

$$\begin{aligned}\vec{B}_T(0,0,z) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{D^2 \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right] \sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I D^2}{2\pi z^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{D^2}{4z^2}\right)\sqrt{1 + \frac{D^2}{2z^2}}}\end{aligned}$$

Problema 6

Veamos ahora la expresión del campo magnético para distancias grandes, es decir $z >> D$. Podemos escribir:

$$\vec{B}_T(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{D^2 \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I D^2}{2\pi z^3} \frac{1}{(1 + \frac{D^2}{4z^2})\sqrt{1 + \frac{D^2}{2z^2}}}$$

a orden 0 podemos considerar $\frac{D}{z} = 0$ y obtenemos:

$$\vec{B}_T(0,0,z) \simeq \frac{\mu_0 I D^2}{2\pi z^3}\hat{z} = \frac{\mu_0 I A}{2\pi z^3}\hat{z}$$

donde A es el área de la espira. Y podemos ver que a orden 0 coincide la expresión para la espira cuadrada y para la espira circular.

Fuerza de Lorentz

La fuerza sobre una partícula cargada con carga q en presencia de campo eléctrico $\vec{E}$ y campo magnético magnético $\vec{B}$ se puede escribir:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{4}$$

En particular, si tenemos un cable por el cual circulo corriente I en presencia de campo magnético externo la expresión anterior se reduce a:

$$\vec{F} = \int I \vec{dl} \times \vec{B}_{\text{ext}} \tag{5}$$

A su vez, la fuerza sobre una distribución de corriente en superficie $\vec{g}$, en presencia de un campo magnético externo se puede escribir :

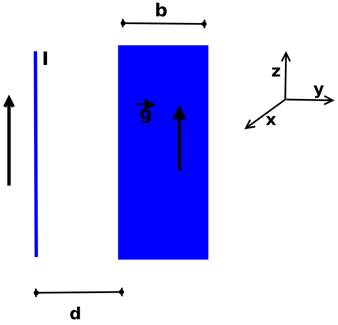
$$\vec{F} = \int \vec{g} dS \times \vec{B}_{\text{ext}} \tag{6}$$

mientras que si tenemos una distibución de corriente en volumen $\vec{j}$:

$$\vec{F} = \int \vec{j} dV \times \vec{B}_{\text{ext}} \tag{7}$$

Problema 5

Calcular la fuerza por unidad de longitud entre una cinta infinita de ancho b por la que circula una densidad superficial de corriente $\vec{g}$ uniforme, y un cable infinito coplanar y paralelo por el que circula una corriente I de igual sentido que $\vec{g}$.



$$\vec{F} = \int \vec{g} dS \times \vec{B}_{\text{hilo}}$$

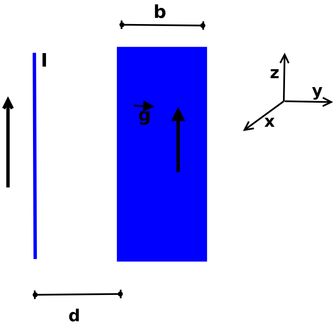
Vamos
a tomar el resultado del campo del hilo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x^2+y^2)}(-y, x)$$

y evaluamos el campo del hilo en el plano y-z porque tenemos que calcular el campo del hilo en la posición de la cinta, es decir $x = 0$

Problema 5

Obtenemos la expresión de campo del hilo en $x = 0$:



$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{x}$$

Se pide
la fuerza por unidad de longitud,
por lo tanto, en vez de integrar
en la superficie $dS = dydz$,
vamos a integrar solamente en dy

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \int_d^{d+b} g\hat{z}dy \times (-\frac{\mu_0 I}{2\pi y})\hat{x} \\
&= -\frac{\mu_0 I g}{2\pi}\int_d^{d+b}\frac{1}{y}\hat{y} \\
&= -\frac{\mu_0 I g}{2\pi}\ln(\frac{d+b}{b})\hat{y}
\end{aligned}$$