Clase 15: Ley de Ampere

Susana J. Landau & Andres Goya

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

18 de junio de 2020

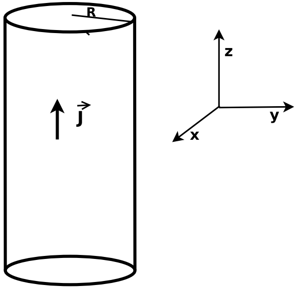
Ley de Ampere

En esta clase vamos a usar la Ley de Ampere para calcular el campo magnético en casos de distribuciones de corriente que tienen alta simetría. Comencemos recordando la Ley de Ampere:

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

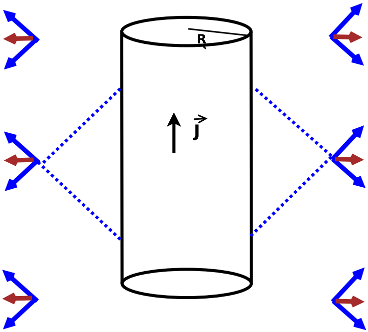
donde I_{enc} es la corriente encerrada por la curva de circulación C. Es importante recordar que como en el teorema de Stokes tenemos que definir una orientación para la superfice por la cual circula la corriente y esta orientación tiene que estar relacionada con la circulación del borde de la superficie, es decir la curva cerrada C. Vamos a elegir la regla de la mano derecha.

Para usar la ley de Ampere para calcular $\vec{B}$ de un cilindro infinito de radio R por el cual circula una corriente en volumen $\vec{J}$ primero tenemos que deducir de la simetría del campo y de la ley de Biot-Savart, la dirección del mismo y de qué coordenadas depende.



- Si rotamos el cilindro un ángulo ϕ alrededor del eje z obtenemos la misma configuración de corrientes, por lo tanto, el campo no va a depender de la coordenada ϕ.
- El cilindro es infinito: por lo tanto, hay simetría de traslación a lo largo del eje z y el campo no va a depender de la coordenada z.

En consecuencia, el campo magnético $\vec{B}$ sólo va a depender de la coordenada r de cilíndricas, es decir $\vec{B} = \vec{B}(r)$



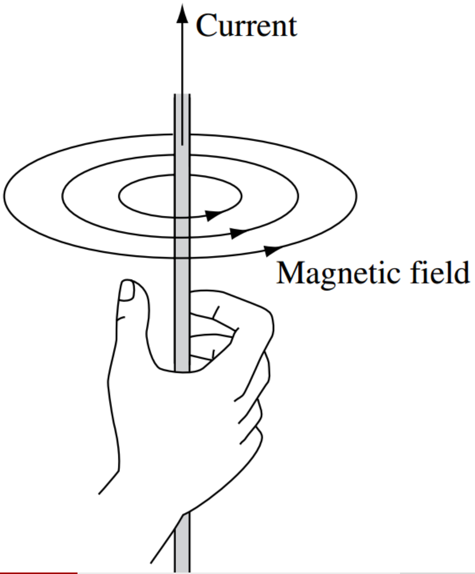
Para ver la dirección del campo $\vec{B}$, recordemos la ley de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\, dV' \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

de aqui vemos que el campo tiene dirección $\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r'})$. La corriente $\vec{j} = j\hat{z}$ tiene dirección z. Análogamente al caso del cilindro cargado con carga ρ y mirando el dibujo, se puede ver que $\vec{r} - \vec{r'} \sim \hat{r}$ y por lo tanto la dirección de $\vec{B} \sim \hat{z} \times \hat{r} = \hat{\phi}$. Por lo tanto, $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$.

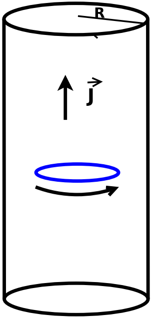
Ahora tenemos que ver cuál será la curva cerrada, que delimita la superficie por la cual circula la corriente que vamos a usar para aplicar la ley de Ampere al cálculo de la expresión para $\vec{B}$.

Campo magnético de un cilindro infinito



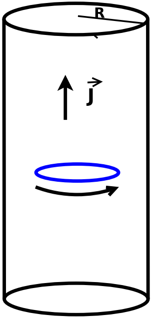
Campo magnético de un cilindro infinito

Veamos primero el caso $r < R$:



$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} \;=\; \int_0^{2\pi} B(r)\hat{\phi}.rd\phi\hat{\phi} = \mu_0 \int \vec{j}.\vec{d}S$$

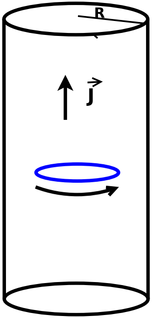
Veamos primero el caso $r < R$:



$$\begin{aligned}\oint_C \vec{B}.\vec{dl} &= \int_0^{2\pi} B(r)\hat{\phi}.rd\phi\hat{\phi} = \mu_0 \int \vec{j}.\vec{d}S \\ 2\pi r B(r) &= \mu_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{r} j\hat{z}.\hat{z}rdrd\phi\end{aligned}$$

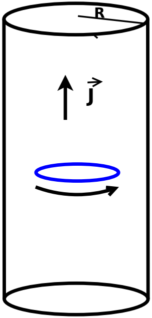
Campo magnético de un cilindro infinito

Veamos primero el caso $r < R$:



$$
\begin{aligned}
\oint_C \vec{B}.\vec{dl} &= \int_0^{2\pi} B(r)\hat{\phi}.rd\phi\hat{\phi} = \mu_0 \int \vec{j}.\vec{d}S \\
2\pi r B(r) &= \mu_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{r} j\hat{z}.\hat{z}rdrd\phi \\
2\pi r B(r) &= \mu_0 j\pi r^2
\end{aligned}
$$

Veamos primero el caso $r < R$:

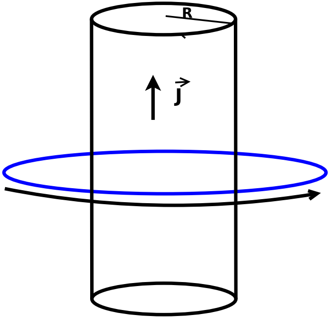


$$
\begin{aligned}
\oint_C \vec{B}.\vec{dl} &= \int_0^{2\pi} B(r)\hat{\phi}.rd\phi\hat{\phi} = \mu_0 \int \vec{j}.\vec{dS} \\
2\pi r B(r) &= \mu_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{r} j\hat{z}.\hat{z}rdrd\phi \\
2\pi r B(r) &= \mu_0 j \pi r^2
\end{aligned}
$$

Finalmente obtenemos que para $r < R$:

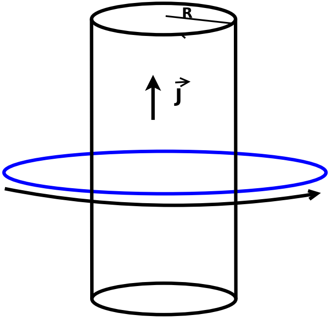
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 j r}{2}\hat{\phi}$$

Veamos ahora el caso $r > R$:



$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} \;=\; \int_0^{2\pi} B(r)\hat{\phi}.rd\phi\hat{\phi} = \mu_0 \int \vec{j}.\vec{dS}$$

Veamos ahora el caso $r > R$:

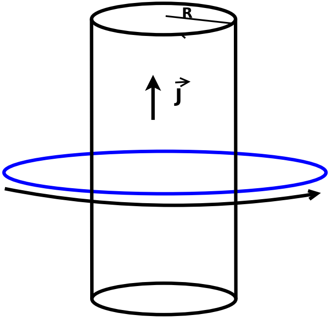


$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \int_0^{2\pi} B(r)\hat{\phi}.rd\phi\hat{\phi} = \mu_0 \int \vec{j}.\vec{dS}$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 \int_0^{2\pi}\int_0^R j\hat{z}.\hat{z}rdrd\phi$$

Campo magnético de un cilindro infinito

Veamos ahora el caso $r > R$:

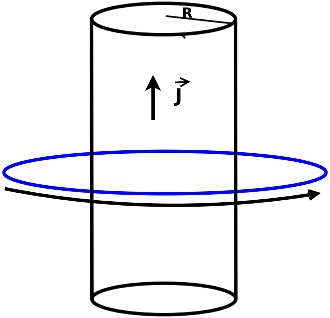


$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \int_0^{2\pi} B(r)\hat{\phi}.rd\phi\hat{\phi} = \mu_0 \int \vec{j}.\vec{dS}$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 \int_0^{2\pi}\int_0^R j\hat{z}.\hat{z}rdrd\phi$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 j\pi R^2$$

Veamos ahora el caso $r > R$:



$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \int_0^{2\pi} B(r)\hat{\phi}.rd\phi\hat{\phi} = \mu_0 \int \vec{j}.\vec{dS}$$
$$2\pi r B(r) = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R j\hat{z}.\hat{z}rdrd\phi$$
$$2\pi r B(r) = \mu_0 j \pi R^2$$

Finalmente obtenemos que para $r > R$:

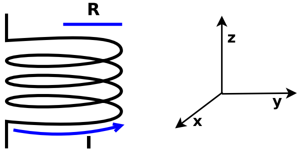
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}\hat{\phi}$$

En resumen:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 j r}{2}\hat{\phi} & r < R \\ \frac{\mu_0 j R^2}{2r}\hat{\phi} & r > R \end{cases}$$

Campo magnético de un solenoide infinito

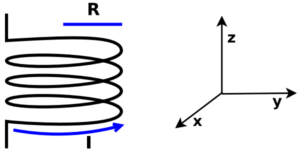
Ahora vamos a calcular $\vec{B}$ de un solenoide infinito de radio R por el cual circula una corriente en volumen I primero tenemos que deducir de la simetría del campo y de la ley de Biot-Savart, la dirección del mismo y de qué coordenadas depende.



- Si rotamos el solenoide un ángulo ϕ alrededor del eje z obtenemos la misma configuración de corrientes, por lo tanto, el campo no va a depender de la coordenada ϕ.
- El solenoide es infinito: por lo tanto, hay simetría de traslación a lo largo del eje z y el campo no va a depender de la coordenada z.

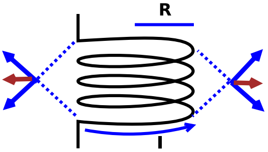
Campo magnético de un solenoide infinito

Ahora vamos a calcular $\vec{B}$ de un solenoide infinito de radio R por el cual circula una corriente en volumen I primero tenemos que deducir de la simetría del campo y de la ley de Biot-Savart, la dirección del mismo y de qué coordenadas depende.



- Si rotamos el solenoide un ángulo ϕ alrededor del eje z obtenemos la misma configuración de corrientes, por lo tanto, el campo no va a depender de la coordenada ϕ.
- El solenoide es infinito: por lo tanto, hay simetría de traslación a lo largo del eje z y el campo no va a depender de la coordenada z.

En consecuencia, el campo magnético $\vec{B}$ sólo va a depender de la coordenada r de cilíndricas, es decir $\vec{B} = \vec{B}(r)$



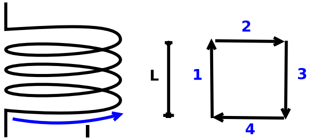
Para ver la dirección del campo $\vec{B}$, vamos a calcular la dirección de

$$I\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r'})$$

La corriente $I\vec{dl} = I\, d\phi\, \hat{\phi}$ tiene dirección ϕ. Mirando el dibujo, se puede ver que $\vec{r} - \vec{r'} \sim \hat{r}$ y por lo tanto la dirección de $\vec{B} \sim \hat{\phi} \times \hat{r} = \hat{z}$. Por lo tanto, $\vec{B} = B(r)\hat{z}$.

Una alternativa es usar la regla de la mano derecha, para ver la dirección del campo: Ponemos los dedos siguiendo la dirección de la corriente y el pulgar nos dará la dirección y sentido del campo.

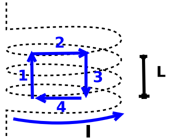
Campo magnético de un solenoide infinito



Veamos el
caso donde la curva cerrada se encuentra totalmente en $r > R$. Aplicamos la ley de Ampere a la curva cerrada que se ve en el dibujo y recordamos que $B = B(r)\hat{z}$.

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{B}.\vec{dl} &= \int_1 B(y_1)\,\hat{z}.dz\hat{z} + \int_2 B(r)\,\hat{z}.dy\hat{y} \\ &\quad + \int_3 B(y_2)\,\hat{z}.dz(-\hat{z}) + \int_4 B(r)\,\hat{z}.(-dy)\hat{y} = 0 \\ &= LB(y_1) - LB(y_2) = 0\end{aligned}$$

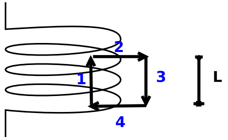
De lo anterior, se puede ver que $B(y_1) = B(y_2)$ y como esto vale para cualquier curva cerrada en $r > R$ podemos concluir que afuera del solenoide, es decir, para $r > R$ el campo magnético es **uniforme**.



Veamos el caso donde la curva cerrada se encuentra totalmente en $r < R$. Aplicamos la ley de Ampere a la curva cerrada que se ve en el dibujo y recordamos que $B = B(r)\hat{z}$.

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{B}.\vec{dl} &= \int_1 B(y_1)\,\hat{z}.dz\hat{z} + \int_2 B(r)\,\hat{z}.dy\hat{y} \\ &\quad + \int_3 B(y_2)\,\hat{z}.dz(-\hat{z}) + \int_4 B(r)\,\hat{z}.(-dy)\hat{y} = 0 \\ &= LB(y_1) - LB(y_2) = 0\end{aligned}$$

De lo anterior, se puede ver que $B(y_1) = B(y_2)$ y como esto vale para cualquier curva cerrada en $r < R$ podemos concluir que dentro del solenoide, es decir, para $r < R$ el campo magnético también es **uniforme**.



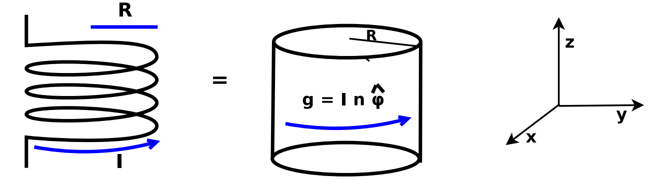
Ahora tomamos una curva que tiene una parte dentro y una parte fuera del soleonoide. En este punto, tenemos que asumir que $\vec{B} = 0$ fuera del solenoide para obtener el valor del campo dentro del solenoide. Esta hipótesis la vamos a verificar luego calculando el campo magnético por la ley de Biot-Savart.

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{B}.\vec{dl} &= \int_1 B(y_1)\,\hat{z}.dz\hat{z} + \int_2 B(r)\,\hat{z}.dy\hat{y} \\ &\quad + \int_3 B(y_2)\,\hat{z}.dz(-\hat{z}) + \int_4 B(r)\,\hat{z}.(-dy)\hat{y} = \mu_0 I n L \\ &= LB(y_1) = \mu_0 I n L\end{aligned}$$

donde n es el número de vueltas por unidad de longitud del solenoide. De esta manera obtenemos el campo magnético dentro del solenoide:

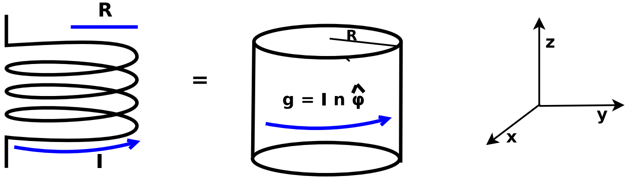
$$\vec{B} = \mu_0 I n \hat{z}$$

A continuación vamos a mostrar que $\vec{B} = 0$ afuera del solenoide. Para lo cual, vamos a usar la ley de Biot y Savart para calcular el campo. Sabemos que $\vec{B} = B(r)\hat{z}$ con lo cual sólo tenemos que calcular la componente z.



- $I\vec{dl} = \vec{g}dS = In\hat{\phi}$
- $\vec{r} = (r\cos\phi, r\sin\phi, z)$
- $\vec{r'} = (R\cos\phi', R\sin\phi', z')$

A continuación vamos a mostrar que $\vec{B} = 0$ afuera del solenoide. Para lo cual, vamos a usar la ley de Biot y Savart para calcular el campo. Sabemos que $\vec{B} = B(r)\hat{z}$ con lo cual sólo tenemos que calcular la componente z.



- $I\vec{dl} = \vec{g}dS = In\hat{\phi}$
- $\vec{r} = (r\cos\phi, r\sin\phi, z)$
- $\vec{r'} = (R\cos\phi', R\sin\phi', z')$

Entonces, obtenemos

$$|\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{(r\cos\phi - R\cos\phi')^2 + (r\sin\phi - R\sin\phi')^2 + (z - z')^2}$$

Podemos expresar la ecuación anterior:

$$|\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\phi\cos\phi' - 2rR\sin\phi\sin\phi' + (z-z')^2}$$

Entonces, vamos a calcular el campo de un solenoide finito de largo $2L$ y luego vamos tomar el límite $L \to \infty$:

$$\vec{B} = k\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L} \frac{In\hat{\phi}' \times (r\cos\phi - R\cos\phi', r\sin\phi - R\sin\phi', z - z')Rd\phi' dz'}{(r^2 + R^2 - 2rR(\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi)' + (z-z')^2)^{3/2}}$$

donde $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$, recordando que $\hat{\phi}' = (-\sin\phi', \cos\phi', 0)$, obtenemos para la componente z

$$B_z = k\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L} \frac{In(R - r(\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi'))Rd\phi' dz'}{(r^2 + R^2 - 2rR(\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi') + (z-z')^2)^{3/2}}$$

Ya vimos anteriormente que el solenoide tiene simetría de revolución alrededor del eje z y por lo tanto no va a depender de la coordenada ϕ. Por lo tanto, podemos fijar $\phi = 0$ sin perder generalidad y obtenemos:

$$B_z = k \int_0^{2\pi} \int_{-L}^{L} \frac{In(R - r\cos\phi')Rd\phi' dz'}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\phi' + (z - z')^2)^{3/2}}$$

Resolviendo las integrales con Mathematica y tomando el límite $L \to \infty$ se obtiene:

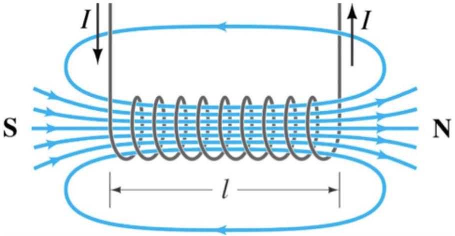
$$B_z = \frac{\mu_0 In}{2} \left(\frac{-r + R}{|-r + R|} + 1 \right)$$

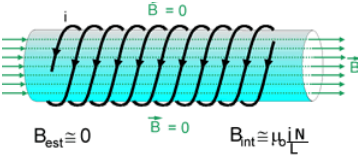
El detalle de la resolución de las integrales excede a esta materia y por eso no nos vamos a detener en ese punto. Para F3, nos interesa mostrar el camino a seguir para mostrar que $\vec{B} = 0$ afuera del solenoide infinito. Cuando $r < R$, la expresión anterior resulta en $B_z = 0$, mientras que si $r > R$, resulta $B_z = \mu_0 In$ que es lo mismo que obtuvimos usando la ley de Ampere.

Problema 8

En resumen, el campo del solenoide se puede expresar:

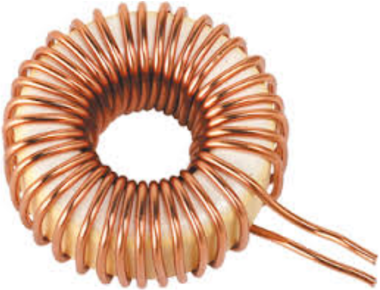
$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 I n \, \hat{z} & r < R \\ \\ 0 & r > R \end{cases}$$

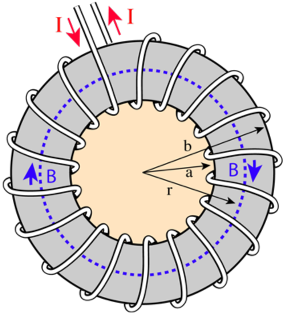




Campo magnético de un toroide

Ahora vamos a calcular el campo magnético de un toroide de radio interior a y radio exterior b, con un arrollamiento denso de N vueltas por el que circula una corriente I.

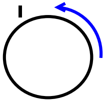




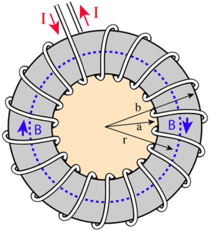
La segunda figura muestra la proyección de un toroide en el plano $x - y$. Se puede ver que el toroide tiene simetría de revolución alrededor del eje z y por lo tanto el campo $\vec{B}$ no va a depender de la coordenada ϕ.

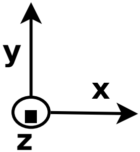
Campo magnético de un toroide

Por lo tanto, $\vec{B} = \vec{B}(r, z)$. La dirección del campo $\vec{B}$ se puede deducir aplicando la regla de la mano derecha. Veamos por el momento el recorte de una sola espira del toroide.



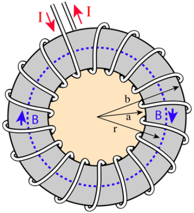
Si usamos la regla de la mano derecha, podemos concluir que el campo magnético sale del plano del dibujo. Si extenedemos, ese razonamiento a todas las espiras, vemos que la dirección del campo magnético es $\hat{\phi}$, como se ve en la figura:





Campo magnético de un toroide

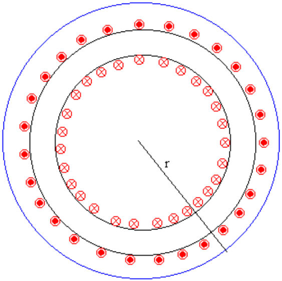
De lo anterior, concluimos que $\vec{B} = B(r,z)\hat{\phi}$. Vamos a usar la curva de Ampere que se indica en la figura con la línea puntuada celeste para calcular el campo magnético en el interior del toroide, es decir $a < r < b$



$$\begin{aligned} \oint \vec{B}.\vec{dl} &= \int_0^{2\pi} B(r,z)\,\hat{\phi}\,.\,r\,d\phi\,\hat{\phi} = \mu_0 I N \\ 2\pi B(r,z) r &= \mu_0 I N \end{aligned}$$

De lo anterior, se
concluye que dentro del toroide, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}\hat{\phi}$.

A su vez, veamos el caso en que la curva celeste está fuera del toroide, y aplicamos la ley de Ampere:



De la figura podemos ver que para el caso $r > b$ cada espira del toroide atraviesa dos veces el camino cerrado (la curva azul) transportando intensidades de sentidos opuestos y por lo tanto la $I_{\text{enc}} = 0$. En el caso de que la curva azul este en $r < a$, es trivial que $I_{\text{enc}} = 0$.

$$\begin{aligned} \oint \vec{B}.\vec{dl} &= \int_0^{2\pi} B(r,z)\hat{\phi}\,.\,r\,d\phi\,\hat{\phi} = 0 \\ 2\pi B(r,z)\,r &= 0 \end{aligned}$$

Y por lo tanto, concluimos que $\vec{B} = 0$ afuera del toroide.

Campo magnético de un toroide

En resumen:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}\,\hat{\phi} & a < r < b \\ \\ 0 & r < a \quad o \quad r > b \end{cases}$$