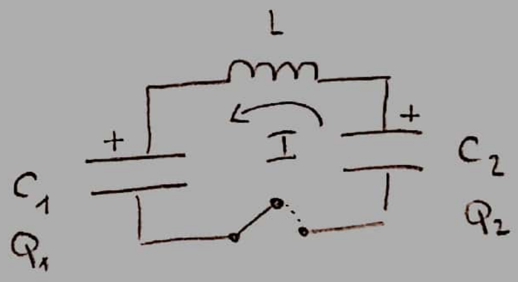
Problema (2)

G6.P2.01



$Q_1(t=0) = Q_{10} = 0$

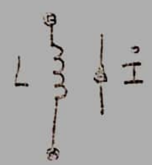
$Q_2(t=0) = Q_{20} = Q_0 \neq 0$ $\quad Q_0 = \text{const}$

A $t=0$ se cierra la llave y la carga positiva contenida en el capacitor 2 empieza a fluir desde éste hacia el capacitor 1.

Entonces, el capacitor 2 se **descarga** mientras el capacitor 1 se **carga**.

A medida q' el capacitor 2 se va descargando aumenta la corriente en el circuito y $\dot{I} > 0$.

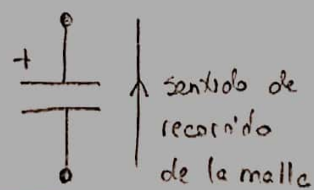
Recordemos q'



$\Delta V = \mathcal{E}_{ind} = -L\dot{I}$

Como el capacitor 2 está perdiendo carga $I = -\dfrac{dQ_2}{dt}$

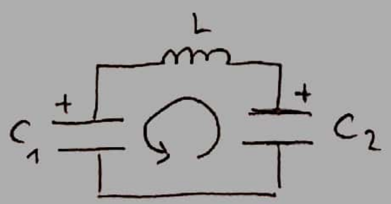
Recordemos tmb q'



$\Delta V = \dfrac{1}{C} Q$

de la placa "negativa" a la "positiva"

Entonces recorriendo el circuito en sentido antihorario



$$\mathcal{E} - \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\mathcal{E}_{ind} + \frac{1}{C_2} Q_2(t) - \frac{1}{C_1} \overbrace{Q_1(t)}^{Q_1(t) = Q_0 - Q_2(t)} = 0$$

$$\mathcal{E}_{in} = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d}{dt}\left(-\frac{dQ_2}{dt}\right) = +L\ddot{Q}_2$$

$I = -\dot{Q}_2$

Ec dif: $\quad L\ddot{Q}_2 + \left(\dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_1}\right) Q_2 - \dfrac{1}{C_1} Q = 0$

Reescribiendo la ec. diff. de una manera más familiar

$$(*) \quad \boxed{\ddot{Q}_2 + \frac{1}{L C_{eq}} Q_2 = \frac{Q_0}{L C_1}}$$

oscilador armónico con forzante constante

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

- Solución particular: $Q_{2p} = \text{const} \Rightarrow$ reemplazando en $(*)$

obtenemos $\boxed{Q_{2p} = \frac{C_{eq} Q_0}{C_1}}$

- Solución homogénea:

solución más general de $\boxed{\ddot{Q}_2 + \frac{1}{L C_{eq}} Q_2 = 0}$ $(\star)$

Propenemos $Q_{2h}(t) = \alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)$

con α_1 y α_2 constantes a determinar por condiciones iniciales de la solución completa

Obs/ tmp podemos proponer $Q_{2h}(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$

α, φ constantes

ó $Q_{2h}(t) = \mathcal{B} \sin(\omega t + \theta)$

$\mathcal{B}, \theta$ constantes

En cualquier caso reemplazando el ansatz en $(\star)$ vemos q' la frecuencia es

$$\boxed{\omega^2 = \frac{1}{L C_{eq}}}$$

- La solución completa es

$$\boxed{Q_2(t) = \underbrace{\mathcal{A}_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{L C_{eq}}}\right) + \mathcal{A}_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{L C_{eq}}}\right)}_{\text{homogénea}} + \underbrace{\frac{C_{eq}}{C_1} Q_0}_{\text{particular}}}$$

- Condiciones iniciales

$$Q_2(t=0) = Q_0 \qquad \dot{Q}_2(t) = 0$$

$$Q_2(t=0) = \mathcal{A}_1 + \frac{C_{eq}}{C_1} Q_0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_1 = -\frac{C_{eq}}{C_1} Q_0}$$

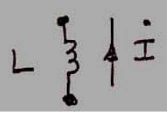
$$\dot{Q}_2(t=0) = \frac{1}{\sqrt{L C_{eq}}} \mathcal{A}_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_2 = 0}$$

Solución

$$\boxed{Q_2(t) = \frac{C_{eq}}{C_1} Q_0 \left[1 - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{L C_{eq}}}\right)\right]}$$

Comentario:

si en vez de definir $I = -\frac{dQ_2}{dt}$ nos hubiésemos referido al capacitor 1, entonces, como el capacitor 1 se está cargando la corriente q' llega a éste trae carga y, por lo tanto $\dot{Q}_1(t) > 0$. Recordemos q' la fem inducida en la inductancia se opone al cambio en la corriente q' circula a través de ella (es decir, al cambio de flujo de campo magnético) entonces $\mathcal{E}_{ind} = -L\dot{I}$ pero ahora $I = +\frac{dQ_1(t)}{dt}$



$\Delta V = -L\dot{I}$

Escribiendo nuevamente las subidas y caídas de potencial recorriendo el circuito en sentido antihorario

$$\mathcal{E} - \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\underbrace{\underbrace{-L\dot{I}}_{= -L\ddot{Q}_1} + \underbrace{\frac{1}{C_2}Q_2}_{= \frac{1}{C_2}(Q_0 - Q_1)} - \frac{1}{C_1}Q_1 = 0}$$

$$\boxed{-L\ddot{Q}_1 - \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}\right)Q_1 + \frac{Q_0}{C_2} = 0}$$

↳ tmb es la ec diff de un oscilador armónico pero p/ $Q_1(t)$ (las condiciones iniciales en este caso son distintas).

Moraleja:

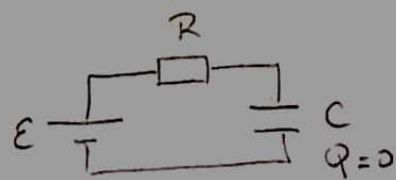
- En un proceso de descarga de un capacitor es conveniente definir la corriente como la cantidad de carga por unidad de tiempo q' está **saliendo** de dicho capacitor (como en el caso de C_2, Q_2 del probema 2)

eg

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

- En un proceso de carga de un capacitor es conveniente definir la corriente como la cantidad de carga por unidad de tiempo está **entrando** en dicho capacitor (como en el caso de C_1, Q_1, del problema 2)

eg



$$I = +\frac{dQ}{dt}$$