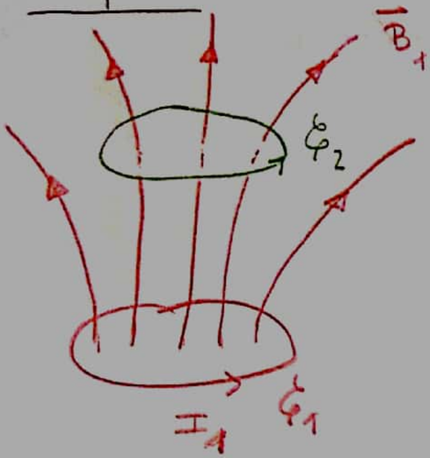
Clase 19 : Inductancia

Repaso:

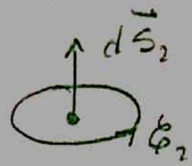


Dos espiras $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$

Por $\mathcal{C}_1$ circula corriente $I_1 \rightarrow$ Campo $\vec{B}_1$

Dicho campo genera flujo Φ_2 a través de $\mathcal{C}_2$

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$



Por Biot-Savart $\quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{\ell}_1 \wedge \hat{r}}{r^2} \Rightarrow \boxed{B_1 \propto I_1}$

$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}\,'$

$$\boxed{\boxed{\Phi_2 = M_{21} I}} \Leftarrow \boxed{\Phi_2 \propto I_1}$$

$\boxed{\Phi_2 = M_{21} I_1}$ el coeficiente de proporcionalidad se denomina **inductancia mutua**

Recordando q':

$$\vec{B}_1 = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_1 \quad y \quad \vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{d\vec{\ell}_1}{r}$$

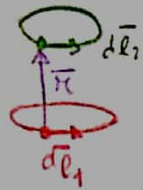
+ Teo Stokes

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \dots = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \oint \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r}$$

$$\therefore \boxed{\boxed{M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r} = M_{21} = M}}$$

Fórmula de Neumann

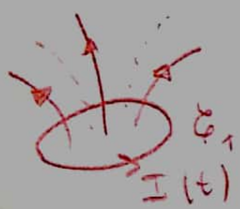
$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{\overline{dl_1} \cdot \overline{dl_2}}{r}$$



Propiedades:

- M es una cantidad puramente **geométrica**
- Vale tanto p/ calcular Φ_2 cuando I circula por $\mathcal{C}_1$ como para calcular Φ_1 cuando I circula por $\mathcal{C}_2$

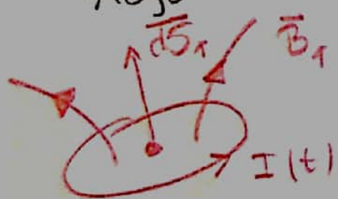
Si la corriente q' circula por $\mathcal{C}_1$ varía, eso va a inducir una fem en $\mathcal{C}_2$ debido a la ley de Faraday



$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} = \mathcal{E}_2$$

Faraday $\quad$ $\Phi_2 = MI_1$

Al mismo tiempo, esa corriente variable hace q' B_1 varíe y en consecuencia tmb lo hace el flujo a través de $\mathcal{C}_1$. Ese flujo tmb va a ser proporcional a I:



$$\boxed{\Phi = LI}$$

L es el coeficiente de **autoinductancia** (ó inductancia) y tmb es puramente geométrico.

Dicha corriente variable tmb va a inducir una fem en $\mathcal{C}_1$ q' se va a oponer a la variación del flujo.

$$\boxed{\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}}$$

$[L] = \text{Henry} = \frac{V\,s}{A}$

Problema (8)

C19. 05

Calcular auto inductancias de:

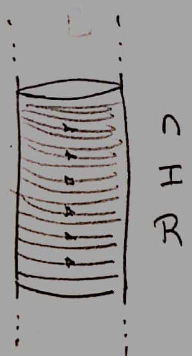
a) Solenoide ∞, b) toroide N vueltas y radio R

c) Solenoide longitud ℓ y radio R $(R \ll \ell)$ y N vueltas

---

a) Del Problema 8 Guía 4 sabemos q' $\overline{B} = B_z \hat{z}$

coord cilíndricos $\{s, \varphi, z\}$

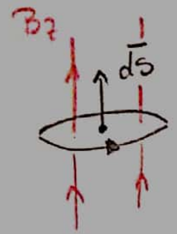


$$B_z = \begin{cases} \mu_0 n I & s < R \\ 0 & s > R \end{cases}$$

C19.06

El flujo a través de una sola espira es

$$\Phi_1 = B_z \underbrace{\pi R^2}_{\text{área}} = \mu_0 n I \pi R^2$$



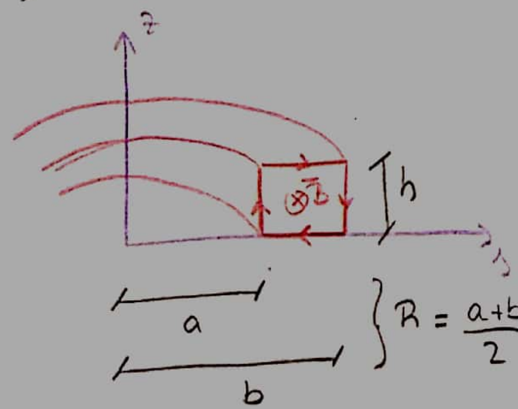
El solenoide tiene $N = n\ell$ vueltas, el flujo total es

$$\Phi = N\Phi_1 = \mu_0 n^2 \ell \pi R^2 I = L I$$ (todo lo q' **no** es corriente I es L)

$L = \mu_0 n^2 \ell \pi R^2$ pero $\ell \to \infty \Rightarrow \boxed{\dfrac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 \pi R^2}$ finito

C19.07

b) toroide



$R = \dfrac{a+b}{2}$

Del problema 8 sabemos q' dentro del toroide el campo es

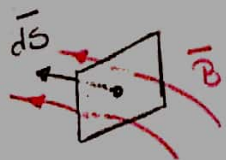
$$\vec{B} = B_\varphi \hat{\varphi}$$

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I N}{2\pi s}$$

y es cero fuera

Flujo a través de una sola espira

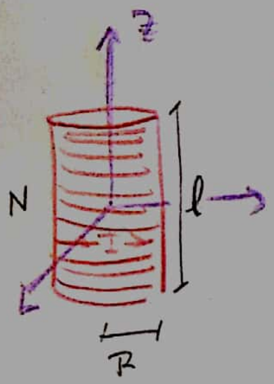
$$\Phi_1 = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_a^b \int_0^h \underbrace{\frac{\mu_0 I N}{2\pi s}\hat{\varphi}}_{\vec{B}} \cdot \underbrace{\hat{\varphi}\, ds\, dz}_{d\vec{S}} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) h = \Phi_1$$



$$\Phi = N\Phi_1 \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln(b/a)}$$

$[L] = [\mu_0][h] = \dfrac{T\,m}{A}\, m \qquad [T] = \dfrac{V\,seg}{m^2} \Rightarrow [L] = \dfrac{V\,seg}{A}$ ✓

c) Solenoide finito

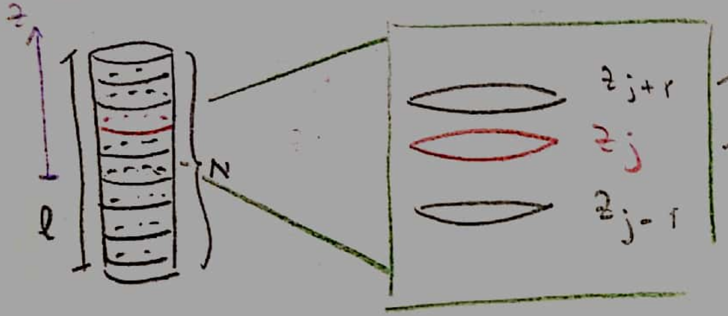


Del problema 9 guía 4, el campo sobre el eje z

$$B_z = \frac{\mu_0 N I}{2\ell}\left\{ \frac{(z+\ell/2)}{\sqrt{R^2+(z+\ell/2)^2}} - \frac{(z-\ell/2)}{\sqrt{R^2+(z-\ell/2)^2}} \right\}$$

Dado q' $R \ll \ell$ puedo aproximar q' el campo es aproximadamente el mismo dentro del solenoide (pero tengo en cuenta q' tiene un largo finito ℓ).

Consideremos una sola espira ubicada a una altura z_j



$\Delta z = \frac{\ell}{N}$ (espiras equiespaciadas)

Flujo a través de una espira ubicada a altura z_j es

$$\Phi_1(z_j) = \underbrace{\pi R^2}_{\text{Area}} \frac{\mu_0 N I}{2\ell}\left\{ \frac{(z_j+\ell/2)}{\sqrt{R^2+(z_j+\ell/2)^2}} - \frac{(z_j-\ell/2)}{\sqrt{R^2+(z_j-\ell/2)^2}} \right\}$$

Flujo total $\quad \Phi = \sum_{j=1}^{N} \Phi(z_j) = \sum_{j=1}^{N} \Phi(z_j) \frac{\Delta z}{(\ell/N)}$

$$= \frac{N}{\ell} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \Phi(z_j)\,\Delta z}_{\text{es como una suma de Riemann}}$$

si el espaciado tiende a cero $\Delta z \to 0$ (el devanado es muy denso)

$$\Phi = n \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \frac{\mu_0 n I}{2}\left\{ \frac{(z+\ell/2)}{\sqrt{R^2+(z+\ell/2)^2}} - \frac{(z-\ell/2)}{\sqrt{R^2+(z-\ell/2)^2}} \right\} dz$$

$(n = N/\ell)$

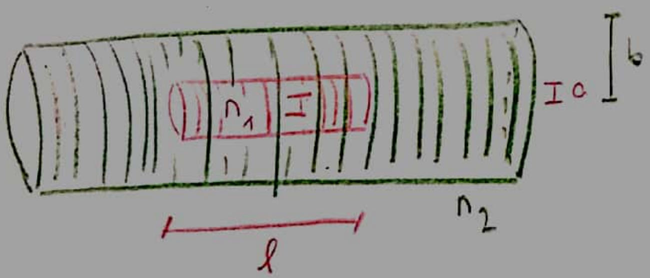
$$\int \frac{(z\pm\alpha)}{\sqrt{R^2+(z\pm\alpha)^2}} = \sqrt{R^2+(z\pm\alpha)^2} + C$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \Phi = \mu_0 n^2 I \pi R^2 \left(\sqrt{R^2+\ell^2}-R\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \mu_0 \pi R^2 n^2 \left(\sqrt{R^2+\ell^2}-R\right)}$$

chequear q' podemos obtener L/ℓ del solenoide ∞

Ejemplo



Solenoide 1 dentro de solenoide 2, si circula corriente I por el solenoide 1, cuál es el flujo a través del solenoide 2?

Aprovechando la simetría del coeficiente de inducción mutua podemos calcular el flujo a través del solenoide 1 del campo debido al solenoide 2.

Campo del solenoide largo (aprox infinito) $B = \mu_0 n_2 I$

El flujo a través de una sola espira del sol. corto $\Phi_1 = B\pi a^2 = \mu_0 n_2 I \pi a^2$

El solenoide 1 tiene $N_1 = n_1 \ell$ vueltas $\Rightarrow \Phi = N_1 \Phi_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 \ell I \Rightarrow \boxed{M = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 \ell}$$

Energía en un campo magnético

Repaso: para establecer una corriente I en un circuito es necesario hacer trabajo en contra de la fem q' se induce. $\mathcal{E} = -L\dfrac{dI}{dt}$

El trabajo realizado sobre una unidad de carga para recorrer todo el circuito es $-\mathcal{E}$

Entonces

$$dW = -\mathcal{E}\, dq = -\mathcal{E}\, I\, dt = +L I\, dI$$

$I = \dfrac{dq}{dt}$ $\qquad$ $\mathcal{E} = -L\dfrac{dI}{dt}$

por lo tanto, el trabajo total p/ ir desde $I=0$ hasta I es

$$\boxed{W = \frac{1}{2} L I^2}$$

Es posible reescribir la expresión anterior de una forma más "simpática" recordando q'

$$\Phi = \int_S \bar{B}\cdot\bar{ds} \quad , \quad \bar{B} = \bar{\nabla}\wedge\bar{A} \quad , \quad + \text{ Teo Stokes}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\oint (\bar{A}\cdot\vec{I})\, dl} \xrightarrow{\bar{I}\, dl \mapsto \bar{J}\, dV} \boxed{W = \frac{1}{2}\int_V \bar{A}\cdot\bar{J}\, dV}$$

todavía es posible escribirla de una forma más amigable utilizando la ley de Ampère + identidades vectoriales

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \frac{|\bar{B}|^2}{\mu_0}\, dV}$$

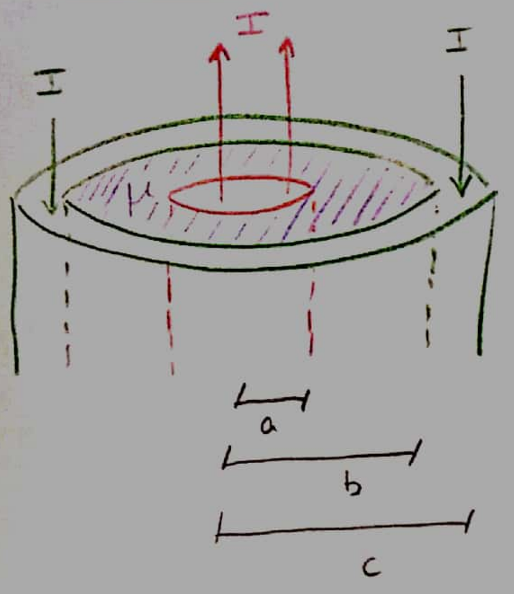
Notemos la similitud con la expresión p/ la energía de un campo eléctrico

$$W_e = \frac{1}{2} \int \varepsilon_0 |\bar{E}|^2 \, dV$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int \frac{|\bar{B}|^2}{\mu_0} \, dV$$

C19.14

Problema (9)



Calcular la energía y a partir de ésta la autoinductancia

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \bar{H} \cdot \bar{B} \, dV \qquad (1)$$

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \qquad (2)$$

Idea: calcular W con la expresión (1) y comparando con (2) obtener L

C19.15

Del Problema 14 de la Guía 4 sabemos q'

$\bar{B} = B(s)\,\hat{\varphi}$ y $\vec{H} = H(s)\,\hat{\varphi}$ coord cilíndricas $\{s, \varphi, z\}$

y por ser un material lineal $\vec{H} = 1/\mu \, \bar{B}$

$$B_\varphi(s) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\, s & s < a \\ \dfrac{\mu I}{2\pi s} & a < s < b \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\left(\dfrac{c^2 - s^2}{c^2 - b^2}\right) & b < s < c \\ 0 & c < s \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner

C19.16

$$W = \frac{1}{2}\int \bar{H}\cdot\bar{B}\,dV = \frac{1}{2}\int \frac{|\bar{B}|^2}{\mu}\,dV = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^l \frac{B^2(s)}{\mu}\,s\,ds\,d\varphi\,dz$$

$$= \frac{1}{2}2\pi l\left\{\underbrace{\int_0^a \frac{B^2(s)}{\mu_0}\,s\,ds}_{(i)} + \underbrace{\int_a^b \frac{B^2(s)}{\mu}\,s\,ds}_{(ii)} + \underbrace{\int_b^c \frac{B^2(s)}{\mu_0}\,s\,ds}_{(iii)}\right\}$$

$$(i) = \int_0^a \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\right)^2 s\,ds = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^4}\int_0^a s^3\,ds = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^4}\,\frac{a^4}{4}$$

$$(i) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2}\,\frac{1}{4}$$

C19.17

$$(ii) = \frac{\mu I^2}{4\pi^2}\ln(b/a)$$

$$(iii) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2}\frac{1}{(c^2-b^2)}\left(c^2\ln(c/b) - \frac{1}{2}(c^2-b^2)\right)$$

$$W = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\left(\frac{1}{1-b^2/c^2}\ln(c/b) - 1/4 + \mu/\mu_0\ln(b/a)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{1}{1-b^2/c^2}\ln(c/b) - 1/4 + \mu/\mu_0\ln(b/a)\right)}$$