Clase 20: Circuito RL e Inductancias

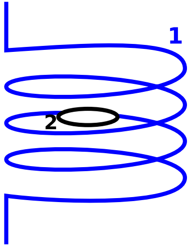
Susana J. Landau & Andres Goya

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

13 de julio de 2020

Problema 7

Un solenoide tiene 1000 vueltas, 20 cm de diámetro y 40 cm de largo. En su centro se ubica coaxialmente otro solenoide de 100 vueltas, 4 cm de diámetro y longitud despreciable, cuya resistencia vale $50\,\Omega$. Inicialmente circulan 5 A por el solenoide exterior, luego se reduce linealmente la corriente a 1 A en 0,5 s. Calcular la corriente que se induce en el solenoide interior, cuya auto-inductancia es L.

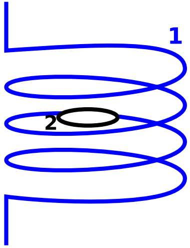


Resumiendo los datos del problema:

$$N_1 = 1000 \qquad R_1 = 0{,}10\,\mathrm{m} \qquad L_1 = 0{,}40\,\mathrm{m}$$
$$N_2 = 100 \qquad R_2 = 0{,}02\,\mathrm{m} \qquad L_2 \simeq 0\,\mathrm{m}$$

Problema 7

Un solenoide tiene 1000 vueltas, 20 cm de diámetro y 40 cm de largo. En su centro se ubica coaxialmente otro solenoide de 100 vueltas, 4 cm de diámetro y longitud despreciable, cuya resistencia vale $50\,\Omega$. Inicialmente circulan 5 A por el solenoide exterior, luego se reduce linealmente la corriente a 1 A en 0,5 s. Calcular la corriente que se induce en el solenoide interior, cuya auto-inductancia es L.



Resumiendo los datos del problema:

$$N_1 = 1000 \qquad R_1 = 0{,}10\,\mathrm{m} \qquad L_1 = 0{,}40\,\mathrm{m}$$
$$N_2 = 100 \qquad R_2 = 0{,}02\,\mathrm{m} \qquad L_2 \simeq 0\,\mathrm{m}$$

A su vez:

$$I_1(t=0) = 5A = I_0 \qquad I_1(t=0{,}5\mathrm{seg}) = 1A$$

Podemos escribir:

$$I_1(t) = I_0 - \alpha t \qquad \alpha = \frac{1A - 5A}{0{,}5\,\mathrm{seg}} = -8A\,\mathrm{seg}^{-1}$$

Podemos escribir:

$$I_1(t) = I_0 - \alpha t \qquad \alpha = \frac{1A - 5A}{0{,}5\,\mathrm{seg}} = -8A\,\mathrm{seg}^{-1}$$

Como consecuencia de la variación en la corriente del solenoide exterior, hay una variación de flujo de campo magnético en el solenoide interior lo cual inducirá una f.e.m:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_T}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Phi_{12} + \Phi_{22})$$

donde

- Φ_{12} es el flujo del solenoide externo (1) que está atravesando el solenoide interno (2),
- Φ_{22} es el flujo del solenoide interno (2) que atraviesa al mismo solenoide

Calculamos Φ_{12}:

$$\Phi_{12} = \int\int_{S_2} \vec{B}_1 \,.\, d\vec{S}_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{R_2} \vec{B}_1 . r dr d\phi \hat{z}$$

Como $R_2 << R_1$ puedo proximar el campo del solenoide **exterior** adentro del solenoide interior como el campo del solenoide **exterior** en el eje z. El campo del solenoide finito sobre el eje z se puede escribir como:

$$\vec{B}_{\mathrm{sol}}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L}\left[\frac{z + L/2}{\sqrt{R_1^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R_1^2 + (z - L/2)^2}}\right]$$

Calculamos Φ_{12}:

$$\Phi_{12} = \int\int_{S_2} \vec{B}_1 \,.\, d\vec{S}_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{R_2} \vec{B}_1.rdrd\phi\hat{z}$$

Como $R_2 << R_1$ puedo proximar el campo del solenoide **exterior** adentro del solenoide interior como el campo del solenoide **exterior** en el eje z. El campo del solenoide finito sobre el eje z se puede escribir como:

$$\vec{B}_{\text{sol}}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L}\left[\frac{z+L/2}{\sqrt{R_1^2+(z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{R_1^2+(z-L/2)^2}}\right]$$

Por lo tanto, el campo en $\vec{r} = (0,0,0)$:

$$\vec{B}_1(0,0,0) = \frac{\mu_0 I_1 n_1}{2}\frac{L_1}{\sqrt{R_1^2+L_1^2/4}}\hat{z}$$

Calculamos Φ_{12}:

$$\Phi_{12} = \int\int_{S_2} \vec{B}_1 \, . \, d\vec{S}_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{R_2} \vec{B}_1 . r dr d\phi \hat{z}$$

Como $R_2 << R_1$ puedo proximar el campo del solenoide **exterior** adentro del solenoide interior como el campo del solenoide **exterior** en el eje z. El campo del solenoide finito sobre el eje z se puede escribir como:

$$\vec{B}_{\text{sol}}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L}\left[\frac{z + L/2}{\sqrt{R_1^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R_1^2 + (z - L/2)^2}}\right]$$

Por lo tanto, el campo en $\vec{r} = (0,0,0)$:

$$\vec{B}_1(0,0,0) = \frac{\mu_0 I_1 n_1}{2}\frac{L_1}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2/4}}\hat{z}$$

Ahora calculamos el flujo en del solenoide interior:

$$\Phi_{12} = N_2 \pi R_2^2 \frac{\mu_0 I_1 n_1 L_1}{2\sqrt{R_1^2 + L_1^2/4}} = I_1 M_{12}$$

y por lo tanto:

$$M_{12} = \frac{N_2 \pi R_2^2 \, \mu_0 n_1 L_1}{2\sqrt{R_1^2 + L_1^2/4}}$$

y por lo tanto:

$$M_{12} = \frac{N_2 \pi R_2^2\, \mu_0 n_1 L_1}{2\sqrt{R_1^2 + L_1^2/4}}$$

A su vez:

$$-\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt} M_{12} I_1 = -M_{12} \dot{I}_1 = -\alpha M_{12}$$

y por lo tanto:

$$M_{12} = \frac{N_2 \pi R_2^2\, \mu_0 n_1 L_1}{2\sqrt{R_1^2 + L_1^2/4}}$$

A su vez:

$$-\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt} M_{12} I_1 = -M_{12}\dot{I}_1 = -\alpha M_{12}$$

Calculamos ahora $-\frac{d\Phi_{22}}{dt}$:

$$\Phi_{22} = L I_2$$

donde L es la autoinductancia del solenoide 2. Y por lo tanto

$$-\frac{d\Phi_{22}}{dt} = -L\frac{dI_2}{dt} = -L\dot{I}_2$$

y por lo tanto:

$$M_{12} = \frac{N_2 \pi R_2^2 \, \mu_0 n_1 L_1}{2\sqrt{R_1^2 + L_1^2/4}}$$

A su vez:

$$-\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt} M_{12} I_1 = -M_{12}\dot{I}_1 = -\alpha M_{12}$$

Calculamos ahora $-\frac{d\Phi_{22}}{dt}$:

$$\Phi_{22} = L I_2$$

donde L es la autoinductancia del solenoide 2. Y por lo tanto

$$-\frac{d\Phi_{22}}{dt} = -L\frac{dI_2}{dt} = -L\dot{I}_2$$

De esta manera obtenemos:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} - \frac{d\Phi_{22}}{dt} = -\alpha M_{12} - L\dot{I}_2$$

Veamos ahora la ecuación que debe cumplir la corriente I_2, teniendo en cuenta que el solenoide 2 tiene resistencia $\mathcal{R}$:

$$\epsilon = -\alpha M_{12} - L\dot{I}_2 = \mathcal{R} I_2$$

Veamos ahora la ecuación que debe cumplir la corriente I_2, teniendo en cuenta que el solenoide 2 tiene resistencia $\mathcal{R}$:

$$\epsilon = -\alpha M_{12} - L\dot{I}_2 = \mathcal{R} I_2$$

Podemos escribir esta ecuación de la siguiente manera:

$$\dot{I}_2 + \frac{\mathcal{R}}{L} I_2 = -\frac{\alpha M_{12}}{L}$$

Veamos ahora la ecuación que debe cumplir la corriente I_2, teniendo en cuenta que el solenoide 2 tiene resistencia $\mathcal{R}$:

$$\epsilon = -\alpha M_{12} - L\dot{I}_2 = \mathcal{R} I_2$$

Podemos escribir esta ecuación de la siguiente manera:

$$\dot{I}_2 + \frac{\mathcal{R}}{L} I_2 = -\frac{\alpha M_{12}}{L}$$

Tenemos una ecuación diferencial a primer orden no homogénea. La solución será:

$$I_2(t) = I_H(t) + I_p$$

donde con $I_H(t)$ es la solución de la ecuación homogénea e I_p es solución de la ecuación particular.

Veamos ahora la ecuación que debe cumplir la corriente I_2, teniendo en cuenta que el solenoide 2 tiene resistencia $\mathcal{R}$:

$$\epsilon = -\alpha M_{12} - L\dot{I}_2 = \mathcal{R} I_2$$

Podemos escribir esta ecuación de la siguiente manera:

$$\dot{I}_2 + \frac{\mathcal{R}}{L} I_2 = -\frac{\alpha M_{12}}{L}$$

Tenemos una ecuación diferencial a primer orden no homogénea. La solución será:

$$I_2(t) = I_H(t) + I_p$$

donde con $I_H(t)$ es la solución de la ecuación homogénea e I_p es solución de la ecuación particular. A su vez:

$$\begin{aligned} I_H(t) &= A_0 \exp(\lambda t) \\ \dot{I}_H(t) &= A_0 \lambda \exp(\lambda t) \end{aligned}$$

Para que $I_H(t)$ sea solución de la ecuación homogénea:

$$A_0 \lambda \exp{(\lambda t)} + \frac{\mathcal{R}}{L} A_0 \exp{(\lambda t)} = (\lambda + \frac{\mathcal{R}}{L}) A_0 \exp{(\lambda t)} = 0$$

Para que $I_H(t)$ sea solución de la ecuación homogénea:

$$A_0 \lambda \exp{(\lambda t)} + \frac{\mathcal{R}}{L} A_0 \exp{(\lambda t)} = (\lambda + \frac{\mathcal{R}}{L}) A_0 \exp{(\lambda t)} = 0$$

Y por lo tanto $\lambda = -\frac{\mathcal{R}}{L}$. La solución particular va a tener la misma forma funcional que el término no homogéneo de la ecuación, es decir, como el término no homogéneo es una constante la solución particular será una constante.

Para que $I_H(t)$ sea solución de la ecuación homogénea:

$$A_0\lambda \exp{(\lambda t)} + \frac{\mathcal{R}}{L} A_0 \exp{(\lambda t)} = (\lambda + \frac{\mathcal{R}}{L}) A_0 \exp{(\lambda t)} = 0$$

Y por lo tanto $\lambda = -\frac{\mathcal{R}}{L}$. La solución particular va a tener la misma forma funcional que el término no homogéneo de la ecuación, es decir, como el término no homogéneo es una constante la solución particular será una constante. De manera que la solución $I_2(t) = A \exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L})} + B$ con $B = \mathrm{cte}$ debe satisfacer la ecuación completa y por lo tanto:

$$-\frac{\mathcal{R}}{L} A_0 \exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L} t)} + \frac{\mathcal{R}}{L}(A_0 \exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L} t)} + B) = -\frac{\alpha M_{12}}{L}$$

Para que $I_H(t)$ sea solución de la ecuación homogénea:

$$A_0 \lambda \exp{(\lambda t)} + \frac{\mathcal{R}}{L} A_0 \exp{(\lambda t)} = (\lambda + \frac{\mathcal{R}}{L}) A_0 \exp{(\lambda t)} = 0$$

Y por lo tanto $\lambda = -\frac{\mathcal{R}}{L}$. La solución particular va a tener la misma forma funcional que el término no homogéneo de la ecuación, es decir, como el término no homogéneo es una constante la solución particular será una constante. De manera que la solución $I_2(t) = A \exp -(\frac{\mathcal{R}}{L}) + B$ con $B = \text{cte}$ debe satisfacer la ecuación completa y por lo tanto:

$$-\frac{\mathcal{R}}{L} A_0 \exp -(\frac{\mathcal{R}}{L} t) + \frac{\mathcal{R}}{L} (A_0 \exp -(\frac{\mathcal{R}}{L} t) + B) = -\frac{\alpha M_{12}}{L}$$

Y por lo tanto $B = -\frac{\alpha M_{12}}{\mathcal{R}}$ y $I_2(t) = A_0 \exp -(\frac{\mathcal{R}}{L} t) + B$. Ahora solo falta determinar A_0 a partir de las condiciones iniciales, en este caso $I_2(t = 0) = 0$:

$$A_0 - \frac{\alpha M_{12}}{\mathcal{R}} = 0$$

Para que $I_H(t)$ sea solución de la ecuación homogénea:

$$A_0\lambda\exp{(\lambda t)} + \frac{\mathcal{R}}{L}A_0\exp{(\lambda t)} = (\lambda + \frac{\mathcal{R}}{L})A_0\exp{(\lambda t)} = 0$$

Y por lo tanto $\lambda = -\frac{\mathcal{R}}{L}$. La solución particular va a tener la misma forma funcional que el término no homogéneo de la ecuación, es decir, como el término no homogéneo es una constante la solución particular será una constante. De manera que la solución $I_2(t) = A\exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L})} + B$ con $B =$cte debe satisfacer la ecuación completa y por lo tanto:

$$-\frac{\mathcal{R}}{L}A_0\exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L}t)} + \frac{\mathcal{R}}{L}(A_0\exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L}t)} + B) = -\frac{\alpha M_{12}}{L}$$

Y por lo tanto $B = -\frac{\alpha M_{12}}{\mathcal{R}}$ y $I_2(t) = A_0\exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L}t)} + B$. Ahora solo falta determinar A_0 a partir de las condiciones iniciales, en este caso $I_2(t=0) = 0$:

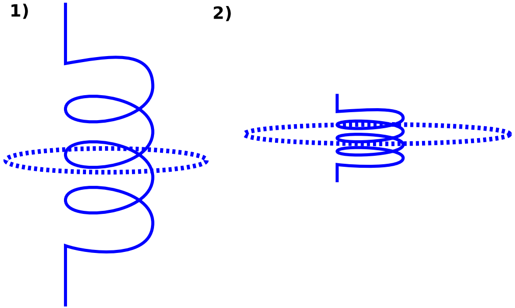
$$A_0 - \frac{\alpha M_{12}}{\mathcal{R}} = 0$$

De esta manera finalmente obtenemos:

$$I_2(t) = \frac{\alpha M_{12}}{\mathcal{R}}(\exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L}t)} - 1)$$

Problema 12

Calcule M_{12} y M_{21} entre una espira circular de radio R_2 y un solenoide finito de longitud L, radio R_1 (suponga $R_1 \ll L$ y $R_1 \ll R_2$), y número de vueltas N_1 dispuestos de tal forma que los centros y los ejes de ambos son coincidentes. Utilice las aproximaciones que crea necesarias y diga cuál de los dos resultados es más confiable cuando L es chico con respecto a R_2.



Vamos a distinguir dos casos:

1. $R_1 << R_2 << L$
   En este
   caso vale la aproximación
   de solenoide infinito.
2. $R_1 << L << R_2$
   En este caso
   NO vale la aproximación
   de solenoide infinito.

Empecemos por un cálculo que será igual para ambas aproximaciones. Recordemos la expresión para M_{12}:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \int\int_{S_{\text{sol}}} \vec{B}_{\text{espira}}.d\vec{S}_{\text{sol}}$$

Empecemos por un cálculo que será igual para ambas aproximaciones. Recordemos la expresión para M_{12}:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \int\int_{S_{\rm sol}} \vec{B}_{\rm espira}.d\vec{S}_{\rm sol}$$

En todos los casos $R_1 << R_2$ y por lo tanto el campo de la espira que atraviesa el interior del solenoide se puede aproximar por el campo de la espira en el eje z :

$$\vec{B}_{\rm esp}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2 + z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

Empecemos por un cálculo que será igual para ambas aproximaciones. Recordemos la expresión para M_{12}:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \int\int_{S_{\text{sol}}} \vec{B}_{\text{espira}}.d\vec{S}_{\text{sol}}$$

En todos los casos $R_1 << R_2$ y por lo tanto el campo de la espira que atraviesa el interior del solenoide se puede aproximar por el campo de la espira en el eje z :

$$\vec{B}_{\text{esp}}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2 + z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

El flujo del campo de la espira a través de una espira del solenoide es:

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2 + z^2)^{3/2}}\hat{z}\, r dr d\phi \hat{z} = \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2 + z^2)^{3/2}}\pi R_1^2$$

Empecemos por un cálculo que será igual para ambas aproximaciones. Recordemos la expresión para M_{12}:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \int\int_{S_{\text{sol}}} \vec{B}_{\text{espira}}.d\vec{S}_{\text{sol}}$$

En todos los casos $R_1 << R_2$ y por lo tanto el campo de la espira que atraviesa el interior del solenoide se puede aproximar por el campo de la espira en el eje z :

$$\vec{B}_{\text{esp}}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

El flujo del campo de la espira a través de una espira del solenoide es:

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^r \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}\, r dr d\phi \hat{z} = \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2+z^2)^{3/2}}\pi R_1^2$$

El flujo total del campo de la espira que atraviesa el solenoide es:

$$\Phi_{12} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{N_1}{L}\frac{\mu_0 I_2 R_2^2 \pi R_1^2}{2(R_2^2+z^2)^{3/2}} dz = \frac{\mu_0 I_2 R_2^2 \pi R_1^2 N_1}{2LR_2^2}\frac{z}{\sqrt{z^2+R_2^2}}\Big|_{-L/2}^{L/2}$$

De esta manera se obtiene:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2L} \frac{L}{\sqrt{L^2/4 + R_2^2}} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

De esta manera se obtiene:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2L} \frac{L}{\sqrt{L^2/4 + R_2^2}} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Y finalmente obtenemos:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Hasta aqui sólo usamos la aproximación $R_1 << R_2$, ahora vamos a usar la aproximación 1) $R_2 << L$:

De esta manera se obtiene:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2L} \frac{L}{\sqrt{L^2/4 + R_2^2}} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Y finalmente obtenemos:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Hasta aqui sólo usamos la aproximación $R_1 << R_2$, ahora vamos a usar la aproximación 1) $R_2 << L$:

$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{L}$$

De esta manera se obtiene:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2L} \frac{L}{\sqrt{L^2/4 + R_2^2}} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Y finalmente obtenemos:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Hasta aqui sólo usamos la aproximación $R_1 << R_2$, ahora vamos a usar la aproximación 1) $R_2 << L$:

$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{L}$$

Ahora siguiendo dentro de la aproximación 1), es decir, que podemos considerar al solenoide como infinito calculamos M_{21}:

$$\Phi_{21} = \int\int_{S_{\text{esp}}} \vec{B}_{\text{sol}}.d\vec{S}_{\text{esp}} = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{L} \pi R_1^2$$

Recordemos que el campo del solenoide es nulo fuera del solenoide.

Y de esta manera obtenemos:

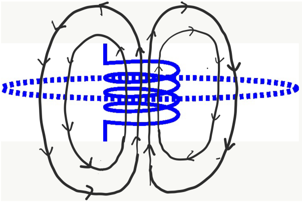
$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{L}$$

Es decir que en esta aproximación obtenemos $M_{12} = M_{21}$. Vamos a hacer el cálculo ahora con la aproximación 2 $L << R_2$.

Y de esta manera obtenemos:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{L}$$

Es decir que en esta aproximación obtenemos $M_{12} = M_{21}$. Vamos a hacer el cálculo ahora con la aproximación 2 $L << R_2$.



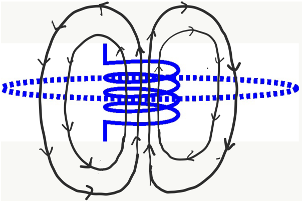
Recordemos el resultado que ya calculamos:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\int\int_{S_{\mathrm{sol}}} \vec{B}_{\mathrm{esp}}.d\vec{S}_{\mathrm{sol}}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Y de esta manera obtenemos:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{L}$$

Es decir que en esta aproximación obtenemos $M_{12} = M_{21}$. Vamos a hacer el cálculo ahora con la aproximación 2 $L << R_2$.



Recordemos el resultado que ya calculamos:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\int\int_{S_{\mathrm{sol}}} \vec{B}_{\mathrm{esp}}.d\vec{S}_{\mathrm{sol}}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

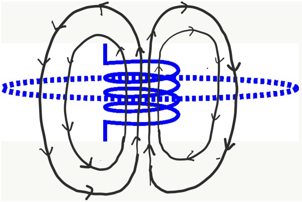
Ahora vamos
a hacer la aproximación $L << R_2$ y obtenemos:

$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2R_2}$$

Y de esta manera obtenemos:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{L}$$

Es decir que en esta aproximación obtenemos $M_{12} = M_{21}$. Vamos a hacer el cálculo ahora con la aproximación 2 $L << R_2$.



Recordemos el resultado que ya calculamos:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\int\int_{S_{\mathrm{sol}}} \vec{B}_{\mathrm{esp}}.d\vec{S}_{\mathrm{sol}}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Ahora vamos a hacer la aproximación $L << R_2$ y obtenemos:

$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2R_2}$$

Para calcular $M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$ el campo que pasa a través de la espira se puede aproximar como el campo del solenoide finito sobre el eje z. Sin embargo en este caso no se están incluyendo las líneas de campo del solenoide que pasan por afuera del solenoide y a través de la espira.

El campo del solenoide finito sobre el eje z se puede escribir como:

$$\vec{B}_{\rm sol}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L}\left[\frac{z+L/2}{\sqrt{R_1^2+(z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{R_1^2+(z-L/2)^2}}\right]$$

Para calcular el flujo del campo del solenoide que pasa por la espira:

$$\Phi_{21} = \vec{B}_{\rm sol}(0,0,0)\pi R_1^2 = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L}\left(\frac{L}{\sqrt{R_1^2+L^2/4}}\right)\pi R_1^2$$

Recordemos que en la aproximación que estamos usando el campo magnético es 0 fuera del solenoide.

El campo del solenoide finito sobre el eje z se puede escribir como:

$$\vec{B}_{\rm sol}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L}\left[\frac{z+L/2}{\sqrt{R_1^2+(z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{R_1^2+(z-L/2)^2}}\right]$$

Para calcular el flujo del campo del solenoide que pasa por la espira:

$$\Phi_{21} = \vec{B}_{\rm sol}(0,0,0)\pi R_1^2 = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L}\left(\frac{L}{\sqrt{R_1^2+L^2/4}}\right)\pi R_1^2$$

Recordemos que en la aproximación que estamos usando el campo magnético es 0 fuera del solenoide.De esta manera obtenemos:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 \pi R_1^2}{2L}\left(\frac{L}{\sqrt{R_1^2+L^2/4}}\right) = \frac{\mu_0 N_1 \pi R_1^2}{2\sqrt{R_1^2+L^2/4}}$$

El campo del solenoide finito sobre el eje z se puede escribir como:

$$\vec{B}_{\text{sol}}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L}\left[\frac{z+L/2}{\sqrt{R_1^2+(z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{R_1^2+(z-L/2)^2}}\right]$$

Para calcular el flujo del campo del solenoide que pasa por la espira:

$$\Phi_{21} = \vec{B}_{\text{sol}}(0,0,0)\pi R_1^2 = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L}\left(\frac{L}{\sqrt{R_1^2+L^2/4}}\right)\pi R_1^2$$

Recordemos que en la aproximación que estamos usando el campo magnético es 0 fuera del solenoide.De esta manera obtenemos:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 \pi R_1^2}{2L}\left(\frac{L}{\sqrt{R_1^2+L^2/4}}\right) = \frac{\mu_0 N_1 \pi R_1^2}{2\sqrt{R_1^2+L^2/4}}$$

Ahora tomamos la aproximación $R_1 << L$ y obtenemos:

$$M_{21} \simeq \frac{\mu_0 N_1 \pi R_1^2}{L}$$

Recordemos ahora que bajo la aproximación 2 obtuvimos:

$$M_{21} \simeq \frac{\mu_0 N_1 \pi R_1^2}{L}$$

y

$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2R_2}$$

Es decir que bajo esta aproximación $M_{12} \neq M_{21}$. Cuál aproximación será mejor?

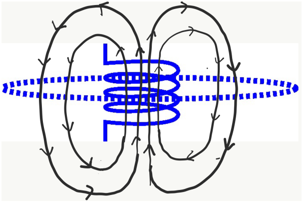
Recordemos ahora que bajo la aproximación 2 obtuvimos:

$$M_{21} \simeq \frac{\mu_0 N_1 \pi R_1^2}{L}$$

y

$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2R_2}$$

Es decir que bajo esta aproximación $M_{12} \neq M_{21}$. Cuál aproximación será mejor?



Evidentemente M_{12}
ya que en el cálculo de M_{21} no se incluyeron en el flujo las líneas de campo que pasan por fuera del solenoide y por eso resulta $M_{21} > M_{12}$