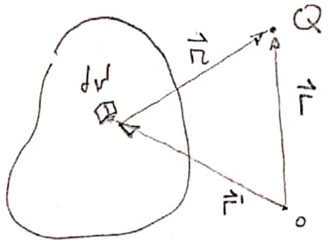
Repaso Clase 1.

- Carga eléctrica: dos tipos (negativa y positiva)
  cuantizada
  se conserva global- y localmente.

- $\vec{F} = Q\,\vec{E}(\vec{r})$; $\vec{E}$: campo eléctrico.



$\vec{\mathscr{r}} \equiv \vec{r} - \vec{r}\,'$

- $$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{todo}} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}^2}\, \hat{\mathscr{r}}\, dv'$$

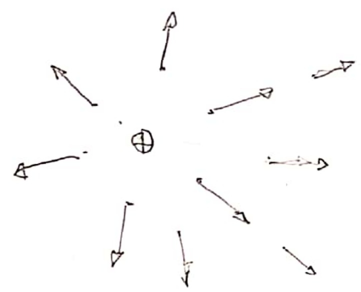
- $$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{\mathscr{r}^2}\hat{\mathscr{r}}$$ ley de Coulomb

- $$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$ principio de superposición

Vamos a reformular la electrostática como ecuaciones diferenciales para el campo $\vec{E}$; También como ecs. integrales (pragmáticas).
Antes de calcular $\nabla \cdot \vec{E}$ y $\nabla \times \vec{E}$: sumamos intuición mediante:

Representaciones gráficas del campo eléctrico

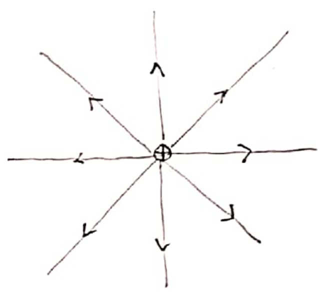
el campo eléctrico es un vector que toma valores en todo el espacio
$\vec{E}(\vec{r})$ es un campo vectorial.
Una forma de representarlo es elegir algunos puntos $\vec{r}_i$ en las cercanías de la distribución de cargas y dibujar los vectores $\vec{E}_i = \vec{E}(\vec{r}_i)$ en esos puntos. Por ejemplo, para una carga puntual: $q > 0$: en el origen



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\,\hat{r}$$

- a distancias iguales de q, el módulo de $\vec{E}$ es el mismo
- $\vec{E}$ es siempre radial: $\vec{E} \parallel \hat{r}$

Si unimos los vectores de manera continua, tenemos líneas de campo.



$\boxed{\text{. la densidad de líneas ahora indica la intensidad (el módulo) del campo}}$ (que tan juntas están)

OJO: el diagrama es 2D y la "densidad" en realidad está en 3D.

- Para que el diagrama de líneas de campo sea semi-cuantitativo, debemos:
  - ser consistentes en el número de líneas, proporcional al valor de las cargas: si q tiene 6 líneas $3q \to 18$.
  - muy cerca de una carga puntual el campo será radial en todas direcciones.
  - la líneas nacen en cargas positivas (fuentes) y terminan en cargas negativas (sumideros)
  - las líneas no se cruzan; o $\vec{E}$ tendría dos valores diferentes en ese punto!

$-2q$

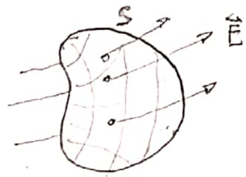
ejercicio:

q

Ley de Gauss

Les dije que nos interesaba calcular $\nabla\cdot\vec{E}$ para una distribución de carga. Y en un momento lo vamos a hacer, pero antes daremos un rodeo por un camino menos directo pero esclarecedor y, creo yo, más intuitivo.

La idea es que gracias al Teorema de la divergencia:

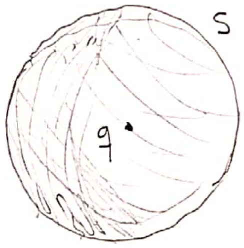


$$\int_V (\nabla\cdot\vec{E})\, dv = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s},$$

con lo que la divergencia está relacionada con el flujo de $\vec{E}$ a través de una superficie cerrada: $\phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}$

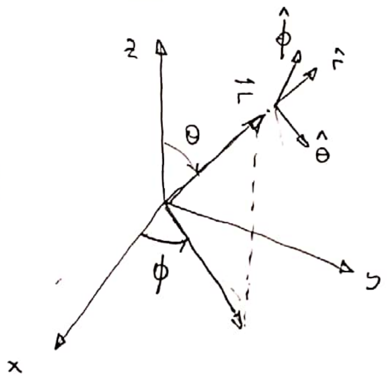
- Nos preguntamos entonces, dada una distribución de cargas, cual es el flujo de $\vec{E}$ a través de una superficie cerrada?

- Empecemos con algo más simple: una carga puntual en el origen y una superficie esférica, centrada en el origen, que la encierra.



$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\,\hat{r}} \qquad \phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = ?$$

para resolver esta integral resulta conveniente escribirla en coordenadas esféricas:



un elemento de superficie diferencial:

$$d\vec{s} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{r}$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\cancel{r^2}}\,\overbrace{\hat{r}\cdot(\cancel{r^2}\sin\theta\, d\theta\, d\phi)\,\hat{r}}^{\hat{r}\cdot\hat{r}=1}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi}\cdot\underbrace{\int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta}_{=\cancel{\pi}=2} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Big\} \; \frac{\text{"la carga encerrada"}}{\varepsilon_0}$$

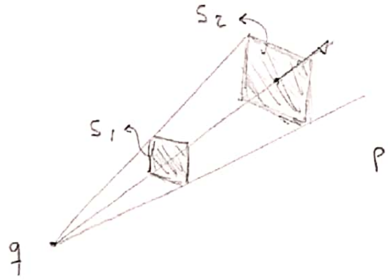
∴ otra forma de resolver el mismo problema, usando las simetrías de la distribución de carga (una carga puntual) y la superficie S (esférica)

$d\vec{s} = ds\,\hat{r}$ y $\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$ $\Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_S E(r)\, ds\, \underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}} = E(r)\cdot\oint_S ds$

$$= E(r)\cdot\underbrace{4\pi r}_{\text{superficie de la esfera}} = q/\varepsilon_0 \Big\}$$

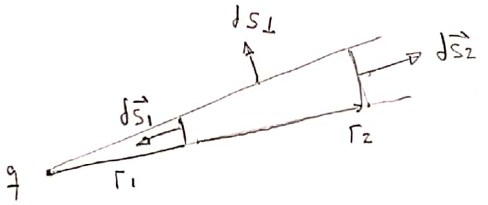
Ahora imaginen una carga puntual y su campo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$



- Consideremos una superficie cerrada construida del siguiente modo:

pequeño
- Tomamos cuatro lineas radiales (en $\hat{r}$) y las unimos para formar las cuatro caras de un "cono" de tapas cuadradas S_1 y S_2
- La superficie S queda entonces conformada por tres partes, los laterales radiales y las tapas, una a distancia r_1 y otra a distancia r_2.



- como los vectores $d\vec{S}$ de una superficie cerrada apuntan por convención siempre hacia afuera, $d\vec{S_1} = dS_1 (-\hat{r})$ y $d\vec{S_2} = dS_2 \hat{r}$.

El flujo de $\vec{E}$ va a tener tres contribuciones:

$$\phi_S = \phi_\perp + d\phi_{S_1} + d\phi_{S_2}$$

la primera se anula: $\phi_\perp = 0$ porque $d\vec{S_\perp} \perp \hat{r}$ (la dirección del campo)
dicho de otra manera: el campo $\vec{E} \parallel \hat{r}$ es tangente a los laterales y no los atraviesa $\Rightarrow$ no contribuye al flujo.

en las tapas...
$$\begin{cases} \vec{E}(r_1) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r_1^2} \hat{r} & ; \quad d\vec{S_1} = r_1^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, (-\hat{r}) \\[2ex] \vec{E}(r_2) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r_2^2} \hat{r} & ; \quad d\vec{S_2} = r_2^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r} \end{cases}$$

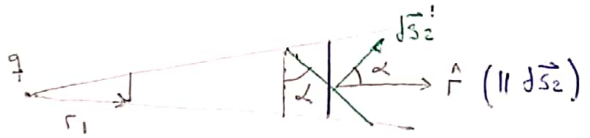
$$\Rightarrow d\phi_{S_1} = \vec{E}(r_1) \cdot d\vec{S_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\cancel{r_1^2}} \hat{r} \cdot \cancel{r_1^2} \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, (-) \hat{r} \qquad (\hat{r} \cdot \hat{r} = 1)$$

$$= (-) \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = (-) \, d\phi_{S_2}$$

$$\boxed{\therefore \ \phi_S \equiv 0}$$

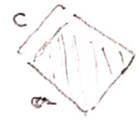
es decir el flujo total que atraviesa S es nulo
Todas las lineas de campo que entran por S_1 salen por S_2.

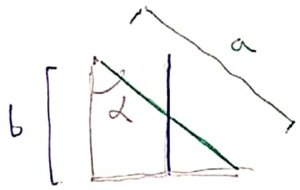
- que pasa si ahora consideramos que las ~~caras~~ tapas están inclinadas?
por ejemplo $d\vec{S_2}$ no está en la dirección radial $\hat{r}$



· la cara S_2 se inclina un angulo α

$S_2 \rightarrow S_2'$





$a \cos\alpha = b$

$ac \cos\alpha = b.c$

$|d\vec{S}_2'| \cos\alpha = |d\vec{S}_2|$

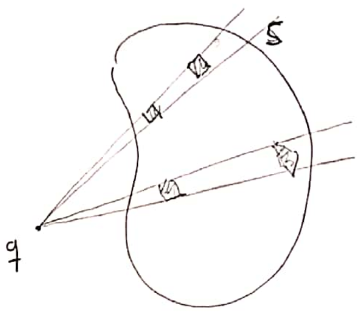
(c es la longitud del otro lado de la cara, tanto de S_2 como S_2')

$$\Rightarrow d\phi_2' = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2' = E(r_2)\,\underline{\hat{r} \cdot d\vec{S}_2'} = E(r_2)\,|d\vec{S}_2'| \cos\alpha = E(r_2)\,|d\vec{S}_2| = d\phi_2$$

$\therefore \boxed{d\phi_2' = d\phi_2}$ el flujo de $\vec{E}$ es el mismo a través de S_2 que de S_2'

· por lo tanto: $\phi_S = 0$ a través de una superficie de lados radiales y tapas inclinadas arbitrariamente.

Ahora, si pensamos en una superficie cerrada arbitraria S, y una carga puntual q fuera de S, entonces

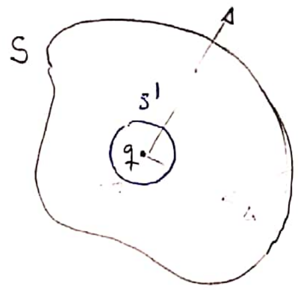


podemos descomponerla en poliedros como el anterior de caras radiales, y el flujo va a ser la suma:

$\boxed{\phi_S = 0}$ si la carga q está fuera de S.

- ¿Que sucede si la carga q está dentro de la superficie cerrada S?

recurrimos a un truco: imaginamos una superficie S'' que tiene dos regiones: S, y una esferita S' de radio pequeño centrada en q: $S'' = S \cup S'$



$\Rightarrow \phi_{S''} = \phi_S + \phi_{S'} = 0$ porque q esta fuera de S''

$\Rightarrow \phi_S = -\phi_{S'} = -\left(-q/\varepsilon_0\right) = q/\varepsilon_0$

porque $d\vec{s}' \sim (-)\,\hat{r}$!

Resumiendo, para una carga puntual q el flujo de $\vec{E}$ a través de una superficie cerrada es

$$\phi_S = \begin{cases} 0 & \text{si } q \text{ está fuera de } S \\ q/\varepsilon_0 & \text{si } S \text{ contiene a } q \end{cases}$$

– ¿ Qué pasa si en vez de una carga puntual tenemos un conjunto de cargas? ¿ o una distribución? En el caso discreto:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

14.1 $$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_S \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{N} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{N} q_i/\varepsilon_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

donde suponemos que todas las cargas q_i están dentro de S, sino su contribución al flujo es nula.

$\Rightarrow Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$ es la carga encerrada en S.

La ley de Gauss es entonces:

14.2 $$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

donde Q_{enc} es la carga encerrada en una superficie arbitraria cerrada S.

Obs: el resultado depende crucialmente de la dependencia $1/r^2$ de $\vec{E}$.

Ahora, volviendo al teorema de la divergencia,

14.3 $$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla\cdot\vec{E})\, dv$$

y la carga encerrada en S puede escribirse como

14.4 $$Q_{enc} = \int_V \rho\, dv$$

Entonces $$\int_V (\nabla\cdot\vec{E})\, dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dv$$

y como esto vale para una superficie arbitraria $\Rightarrow$ V arbitrario resulta que

14.5 $$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

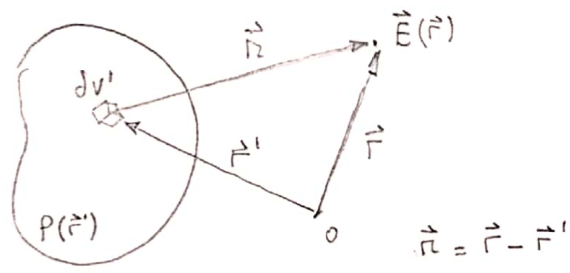
esta es la forma diferencial de la Ley de Gauss, y una de las ecuaciones de Maxwell

dimos un gran rodeo para llegar a (14.5), con suerte ganamos algo de intuición sobre la física que describe, pero... no era más fácil calcular directamente la divergencia de $\vec{E}$?

Interludio clase 2.

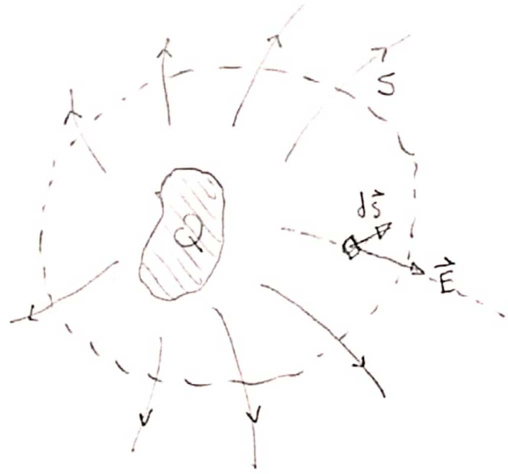
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}^2}\,\hat{\mathscr{r}}\,dv'}$$

ley de Coulomb para $\vec{E}$.



Ley de Gauss (integral)

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$



Ley de Gauss (diferencial)

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

divergencia de $\vec{E}$

La ley de Coulomb para una distribución de carga $\rho(\vec{r})$ se puede escribir

(15.1) $$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{Todo}} \rho(\vec{r}\,') \frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\, dv'$$

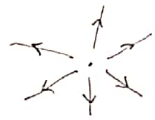
- la integral es sobre Todo el espacio; podemos extenderla así porque $\rho \equiv 0$ donde no hay carga!
- recordamos que $\vec{\imath} = \vec{r} - \vec{r}\,'$

"Solo" necesitamos calcular la divergencia de ésta expresión...

(15.2) $$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\right) \rho(\vec{r}\,')\, dv'$$

acá fíjense que como la divergencia es una derivada con respecto a $\vec{r}$ no afecta a ρ que depende de $\vec{r}\,'$. Solo resta calcular

(15.3) $$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\right) = \, ?$$



Uno podría esperar que esta función debería tener una divergencia muy grande...

Dada la simetría esférica del campo vectorial : $\vec{f}(\vec{r}) = \frac{\hat{r}}{r^2}$

es conveniente escribir el operador vectorial $\nabla =$ div en esféricas

(15.4) $$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, V_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(V_\phi)$$

donde V_r, V_θ, V_ϕ son las componentes de $\vec{V}$ en esféricas, esto es:

$$\vec{V} = V_r\,\hat{r} + V_\theta\,\hat{\theta} + V_\phi\,\hat{\phi}$$

en el caso que estamos considerando $\vec{f} = f_r\,\hat{r}$ con $f_r = 1/r^2$ y las otras dos componentes son nulas, $f_\theta = f_\phi = 0$.

(15.5) $$\therefore\ \nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0.$$

$\boxed{\text{cero!}}$ este resultado parece raro para una función $\vec{f}(\vec{r})$ que "diverge" para todos lados.

Ahora fíjense que si aplicamos el teorema de la divergencia, en una esfera de radio R y volumen $V(R)$ superficie $S(R)$ centrada en el origen,

$$\int_V (\nabla\cdot\vec{f})\,dv = \oint_S \vec{f}\cdot d\vec{s} = \oint_S \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot d\vec{s} = \oint_S \frac{\hat{r}}{R^2}\cdot R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi .$$

Esto es inusitado, porque si $\nabla\cdot\vec{f}$ se anula en todo el espacio entonces está integral debería valer cero. ¿Qué está pasando?

El problema está en $r=0$, donde $\vec{f}$ diverge. Nuestro error oculto está en el calculo de $\nabla\cdot\vec{f}$ en esféricas, que tiene una indeterminación en $r=0$.

Estamos ante un objeto que vale cero en todo el espacio, y sin embargo la integral en una esfera de radio arbitrario R da $4\pi \neq 0$.

Está claro que toda la contribución a la integral viene de un solo punto en $\vec{r}=0$.

Este objeto no es una función (indefinida en $r=0$) sino una distribución o función generalizada, y en Física la conocemos como

Delta de Dirac: $\delta(\vec{r})$

Vamos a hacer un breve interludio matemático para presentarla.

Delta de Dirac en 1D.

Informalmente podemos definir la delta de Dirac $\delta(x)$ como un pico infinitesimalmente angosto e infinitamente alto:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \forall\, x\neq 0 \\ \infty & x=0 \end{cases}$$ (esto no es estrictamente necesario...)

y $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

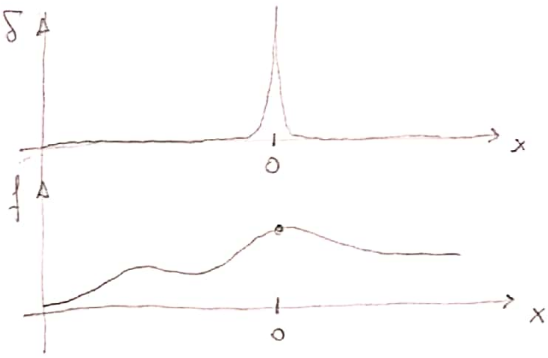
Entonces si $f(x)$ es una función, $f(x)\,\delta(x) = f(0)\,\delta(x) \quad \forall\, x$

ya que $\delta(x)=0 \quad \forall\, x\neq 0$.

Por lo tanto, la convolución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = f(0)\cdot 1 = f(0).$$

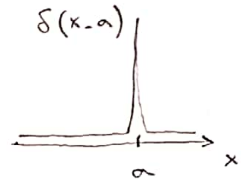
esta última suele ser la definición más formal de la distribución.



NOTA: Una manera de introducir distribuciones como la $\delta(x)$ a partir de la Teoría de funciones es como límite de una secuencia de funciones.

$$\delta(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin kx}{\pi x} \quad \text{ó} \quad \delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon/\pi}{x^2+\varepsilon^2}$$

Acá nos va a bastar con su definición.



- La delta de Dirac puede estar desplazada del origen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a) \qquad \forall f(x) \quad (\text{definición})$$

esto define a una "delta en a":

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq a \\ \infty & \text{en } x = a \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,dx = 1$$

con lo que $f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a) \quad \forall x.$

Delta de Dirac en 3D

$$\delta^3(\vec{r}) \equiv \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

$$\int_{\text{Todo}} \delta^3(\vec{r})\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x) \int_{\infty}^{\infty} dy\,\delta(y) \int_{\infty}^{\infty} dz\,\delta(z) = 1$$

Para una función cualquiera $f(\vec{r})$ definida en $\mathbb{R}^3$

$$\int_{\text{Todo}} f(\vec{r})\,\delta^3(\vec{r}-\vec{a})\,dv = f(\vec{a})$$

Ahora podemos volver a la ec. (15.3). La divergencia de ésta función no es mas que la delta de Dirac con un peso 4π:

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\,\delta^3(\vec{r}) \quad \text{o mas generalmente} \quad \nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right) = 4\pi\,\delta^3(\vec{\mathscr{r}})$$

(regla de la cadena)

Luego de este desvío matemático volvemos al cálculo de la divergencia de $\vec{E}$, ec. (15.2):

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\right) \rho(\vec{r}\,') \, dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int 4\pi \, \delta^3(\vec{\imath}) \cdot \rho(\vec{r}\,') \, dv'$$

$$= \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0} \cancel{4\pi} \int \delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,') \, \rho(\vec{r}\,') \, dv' = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho(\vec{r})$$

(18.1) $\therefore$ $\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r})}$ Ley de Gauss en forma diferencial.

De esta expresión podemos derivar la <u>forma integral</u> de la Ley de Gauss usando el Teorema de la divergencia:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) \, dv = \int_V \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}) \, dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dv = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

(18.2) $\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$ Ley de Gauss en forma integral.

Comentario final: la forma (18.1) puede parecer más compacta y elegante. Es la manera en que habitualmente escribimos las ecs. de Maxwell. Pero vamos a ver que la ec. (18.2) es muy valiosa y muy práctica a la hora de calcular campos para distribuciones de carga con cierta simetría.