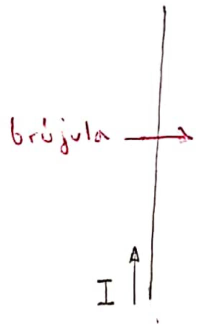
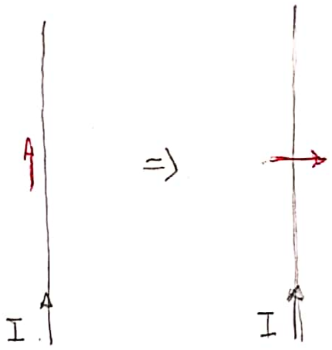
MAGNETOSTATICA

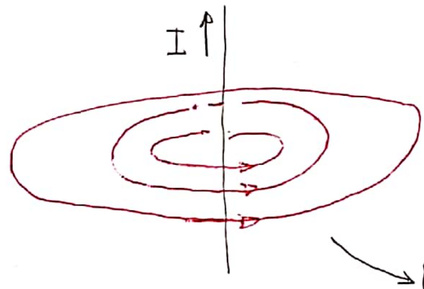
Oersted 1820. una corriente eléctrica genera una fuerza sobre la aguja de una brújula!



la aguja
no se mueve



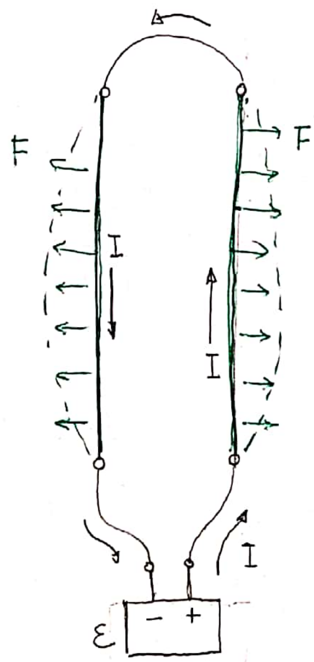
la aguja cambia
de orientación



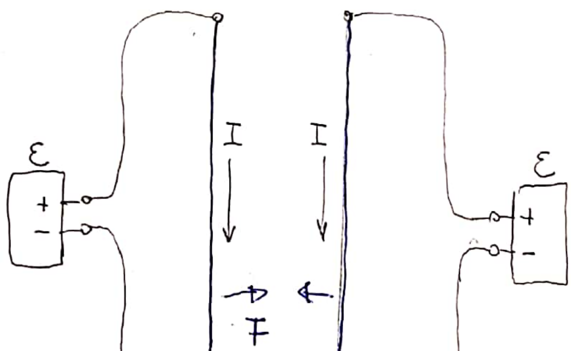
orientación de la aguja
(lineas de campo magnético)

con el pulgar en la direccion de la corriente, los dedos de la mano derecha quedan en la dirección del campo magnético.

Fuerzas entre corrientes.



* entre dos corrientes opuestas hay una fuerza repulsiva

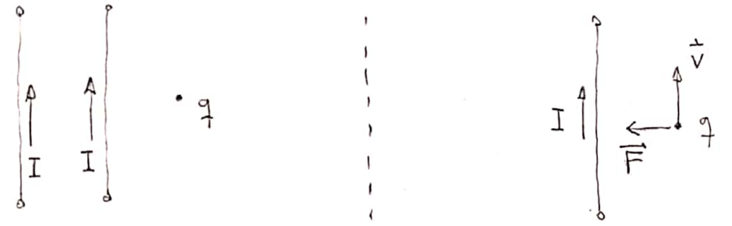


* entre dos corrientes que circulan en el mismo sentido hay una fuerza atractiva

· La fuerza entre los cables no es electrostática.

Los cables son eléctricamente neutros.

Si colocamos una carga puntual en reposo cerca de los cables, no experimenta ninguna fuerza:

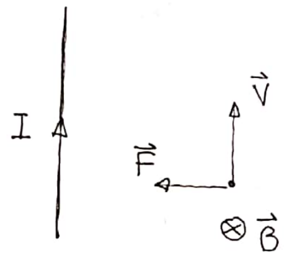


q en reposo | No hay fuerza sobre q.

q en movimiento | hay una fuerza sobre q !

Pero cuando una carga puntual se encuentra en movimiento, entonces aparece una fuerza perpendicular a la velocidad $\vec{v}$ y proporcional a $|\vec{v}|$.

Fuerza magnética:

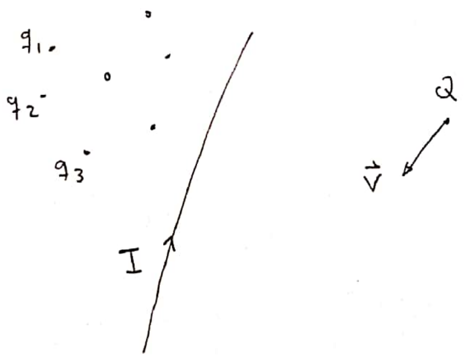


$\vec{B}$ es el campo magnético (dirección de brújula)

$$\boxed{\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B}}$$

Fuerza de Lorentz. | es un postulado de la teoría basado en observaciones y experimentos

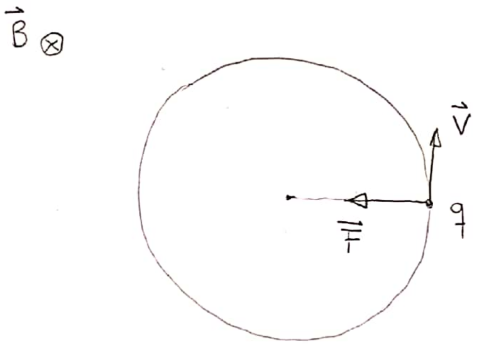
Si hay tanto campos eléctricos como magnéticos presentes:



$$\boxed{\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v} \times \vec{B}}$$

Movimiento en un campo magnético uniforme.

Supongamos que en una región del espacio hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$. Digamos que $\vec{B}$ apunta hacia dentro de la hoja. Una partícula de carga q se mueve con velocidad $\vec{v}$ en esta región, digamos que $\vec{v}$ es paralela a la hoja:



$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B} \quad \perp \vec{v}$$

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \perp \vec{v}$$

La fuerza magnética cambia la dirección del movimiento pero no su rapidez (no afecta al modulo de $\vec{v}$): $\vec{a} \perp \vec{v}$

La partícula realiza un movimiento circular

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$
$$\vec{B} = B\,(-)\,\hat{z}$$
$$|\vec{v}| = v = r\dot{\theta}$$

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,(-)\,r\dot{\theta}^2\,\hat{r} = q\,\vec{v} \times \vec{B} = q\,v\,B\,(-)\,\hat{r}$$

$$m\,r\,\dot{\theta}^2 = q\,v\,B$$

$\times r$

$$m\,v^2 = q\,\cancel{v}\,B \cdot r$$

$$m\,v = q\,B\,r$$

$$r = \frac{m\,v}{q\,B} \qquad \text{(radio de la orbita)}$$

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{v}{r} = \left(\frac{q}{m}\right) \cdot B \qquad \text{(frecuencia de cyclotrón)}$$

↳ relación carga a masa de la partícula.

Recordamos de F1 en coordenadas cilíndricas:

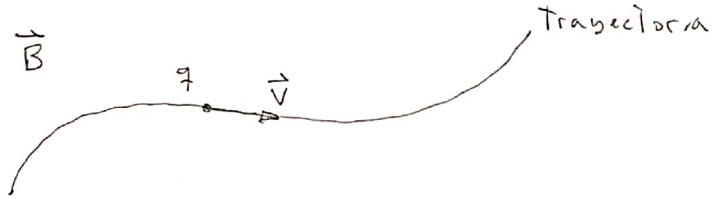
$$\vec{r} = r\,\hat{r} + z\,\hat{z}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{z}\,\hat{z}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta} + \ddot{z}\,\hat{z}$$

Trabajo y energía.

Imaginemos una partícula cargada en movimiento en un campo magnético.



La fuerza magnética $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$

NO realiza Trabajo !!

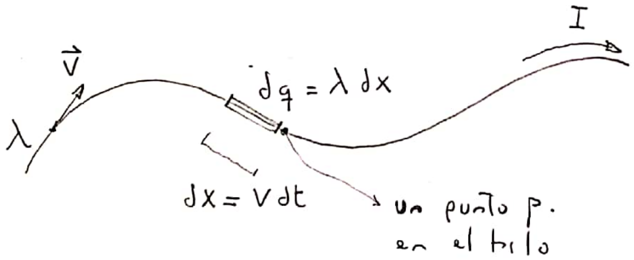
Ya que en un desplazamiento $d\vec{\ell} = \vec{v}.dt$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}\,dt = 0 \qquad \text{porque } \vec{v} \perp \vec{v} \times \vec{B}$$

Densidades de corriente y fuerzas sobre distribuciones de corriente.

Unas clases atrás habíamos introducido la idea de corriente como un hilo cargado en movimiento, p. 112. Repasamos estas ideas y las extendemos.

(1D) Imaginemos un hilo con densidad de carga λ moviéndose con velocidad $\vec{v}$.



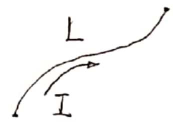
En una porción dx tenemos una carga $dq = \lambda\,dx$ moviéndose con velocidad $\vec{v}$. La corriente a través de un punto es

$$I = \frac{dq}{dt} = \lambda \frac{dx}{dt} = \lambda v \quad \Rightarrow \quad I = \lambda v \quad \text{o} \quad \vec{I} = \lambda \vec{v}$$

Si el cable se encuentra en un campo magnético, la fuerza sobre un elemento de corriente será

$$d\vec{F} = dq\ \vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{con } dq = \lambda\, dl$$
$$= \lambda\, \vec{v} \times \vec{B}\, dl$$
$$= dl\ \vec{I} \times \vec{B}$$

Para un segmento del hilo podemos integrar:



$$\vec{F} = \int_L dl\ \vec{I} \times \vec{B}$$

como en un hilo de corriente $\vec{I} \parallel \vec{dl}$ Tambien podemos escribir:

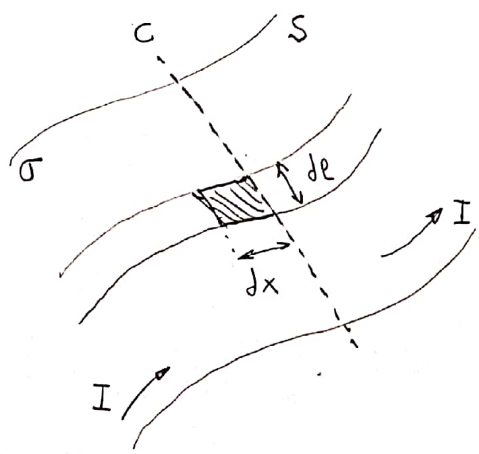
$$\vec{F} = \int_L I\left(\vec{dl} \times \vec{B}\right)$$

Para una corriente estacionaria I es constante a lo largo del hilo y puede salir de la integral:

$$\vec{F} = I \int_L \vec{dl} \times \vec{B} \qquad \text{(análogo de la fuerza de Lorentz para } \vec{I}\text{)}$$

Podemos generalizar esta expresion para corrientes que circulan por superficies y por volúmenes. Primero definiremos las respectivas densidades de corriente.

(2D) Supongamos una superficie con una densidad de carga σ que se mueve con velocidad $\vec{v}$ (siempre tangente a la superficie, de modo que la carga está confinada a la superficie):



Nos interesa ahora la carga que atraviesa la línea C (en vez de un punto p, como en el caso del hilo) por unidad de Tiempo.

Consideramos una bandita de sección dl y lados paralelos a la corriente, es decir tangentes a $\vec{v}$ en cada punto.

La carga en un cuadradito de lados dl y $dx = v\,dt$ es:

$$dq = \sigma \cdot ds = \sigma \, dx \, dl$$

La corriente que atraviesa la sección dl es

$$d\vec{I} = \frac{dq}{dt}\,\hat{v} = \sigma \cdot \frac{dx\,dl}{dt}\,\hat{v} = \sigma \cdot V\,\hat{V}\,dl = \sigma\,\vec{V}\,dl$$

El vector

$$\vec{K} \equiv \sigma\,\vec{V}$$

es la densidad superficial de corriente. Resulta:

$$\vec{I} = \vec{K}\,dl \qquad ó \qquad \vec{K} = \frac{\vec{I}}{dl}$$

Ahora, en presencia de un campo magnético $\vec{B}$, la fuerza sobre un elemento de corriente superficial es

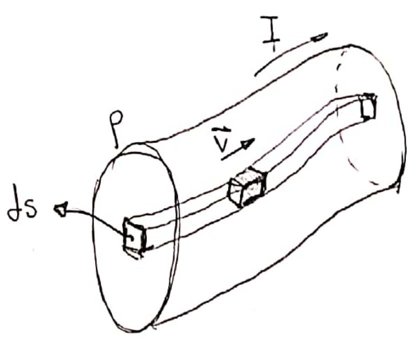
$$d\vec{F} = dq\,\vec{v} \times \vec{B} = \sigma \cdot ds\,\vec{V} \times \vec{B} \quad , \quad \text{donde} \quad \sigma\vec{V} = \vec{K}.$$

$$d\vec{F} = \vec{K} \times \vec{B}\,ds$$

La fuerza integrada en una superficie S será:

$$\vec{F} = \int_S (\vec{K} \times \vec{B})\,ds$$

(3D) Si la corriente circula por un volumen, tenemos una densidad volumétrica de carga ρ que se mueve con velocidad $\vec{v}$.



$$dq = \rho\,dv = \rho \cdot dx\,ds$$

$$d\vec{I} = \frac{dq}{dt}\,\hat{v} = \rho\,\frac{dx}{dt}\,\hat{v}\,ds = \rho\,\vec{v}\,ds$$

La densidad volumétrica de corriente

$$\vec{J} = \rho\,\vec{v} = \frac{d\vec{I}}{ds}$$

En presencia de un campo magnético la fuerza sera

$$d\vec{F} = dq\,\vec{v} \times \vec{B} = dv \cdot \rho\vec{v} \times \vec{B} = dv \cdot \vec{J} \times \vec{B} \quad \therefore \quad \vec{F} = \int_V dv\,(\vec{J} \times \vec{B})$$

Ley de Biot - Savart.

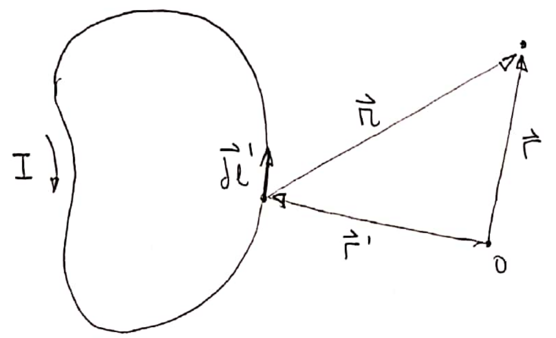
Así como las cargas eléctricas en reposo generan campos eléctricos que están descriptos por la electrostática (Ley de Coulomb), las corrientes eléctricas estacionarias generan campos magnéticos.

La magnetostática estudia los campos magnéticos producidos por corrientes estacionarias.

cargas inmóviles (distribuciones de carga invariantes) $\partial_t \rho = 0$ $\longrightarrow$ campos eléctricos constantes (Electrostática)

corrientes estacionarias $\partial_t \vec{J} = \vec{0}$ $\longrightarrow$ campos magnéticos constantes (Magnetostática)

En forma análoga a la ley de Coulomb, la Ley de Biot - Savart describe los campos magnéticos generados por corrientes estacionarias:



$$d\vec{I}' = I\, d\vec{l}' = \vec{I}\, dl'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \frac{d\vec{I}(\vec{r}') \times \hat{\imath}}{\imath^2}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{\imath^2} (\vec{I} \times \hat{\imath})\, dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{1}{\imath^2} (d\vec{l}' \times \hat{\imath})$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ es la permeabilidad del vacío.

Las unidades de B son los Tesla: $1\,T = 1 \frac{N}{A\,m}$

Magnetostática – breve repaso

- Una corriente estacionaria genera un campo magnético estatico
- Un campo magnético produce una fuerza sobre cargas en movimiento, por ejemplo sobre hilos con corrientes.
- La fuerza de Lorentz es $\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B}$
  - $\vec{F}_m \perp \vec{v} \Rightarrow$ no hace trabajo.
- En presencia de campos electricos y magnéticos

(147.1) $$\boxed{\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v} \times \vec{B}}$$

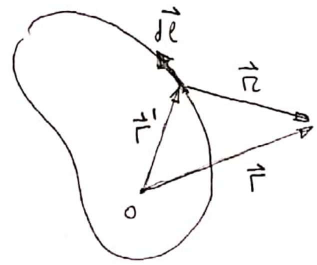
- La fuerza sobre una corriente

(147.2) $$\vec{F} = \int I\, d\vec{l} \times \vec{B} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}$$ (hilo, corriente estacionaria)

(147.3) $$\vec{F} = \int \vec{K} \times \vec{B}\, ds$$ (corriente superficial)

(147.4) $$\vec{F} = \int \vec{J} \times \vec{B}\, dv$$ (corriente volumétrica)

- El campo generado por un hilo de corriente está dado por la ley de Biot – Savart:



(147.5) $$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{I}(\vec{r}\,') \times \hat{r}}{r^2}$$

donde como siempre $\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}\,'$

$\vec{r}\,'$ da la posición de la fuente de campo, en este caso un elemento infinitesimal de corriente $d\vec{I}(\vec{r}\,')$.

(147.6) $$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, I \int \frac{1}{r^2} \left(d\vec{l}\,' \times \hat{r} \right)}$$ donde $d\vec{I}(\vec{r}\,') = I\, d\vec{l}(\vec{r}\,') = I\, d\vec{l}\,'$

Junto con el principio de superposición, esta expresión permite hallar el campo para una coleccion de corrientes arbitrarias.

Campos magnéticos de distribuciones de corriente

El elemento de corriente $d\vec{I}(\vec{r}')$ en la ec. (147.5) puede escribirse para corrientes distribuidas

$d\vec{I} = \vec{I}\, dl = I\, d\vec{l}$ hilo de corriente

$d\vec{I} = \vec{K}\, ds$ densidad superficial de corriente $\vec{K}$

$d\vec{I} = \vec{J}\, dv$ densidad volumétrica de corriente $\vec{J}$

Las integrales en cada caso son

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{\imath^2} \left(\vec{I}(\vec{r}') \times \hat{\imath}\right) dl'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \frac{1}{\imath^2} \left(\vec{K}(\vec{r}') \times \hat{\imath}\right) ds'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{\imath^2} \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{\imath}\right) dv'$$

OJO: uno podría plantear que una carga puntual en movimiento es una "corriente" $q\vec{v}$ y escribir la fórmula

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{\imath}}{\imath^2}$$

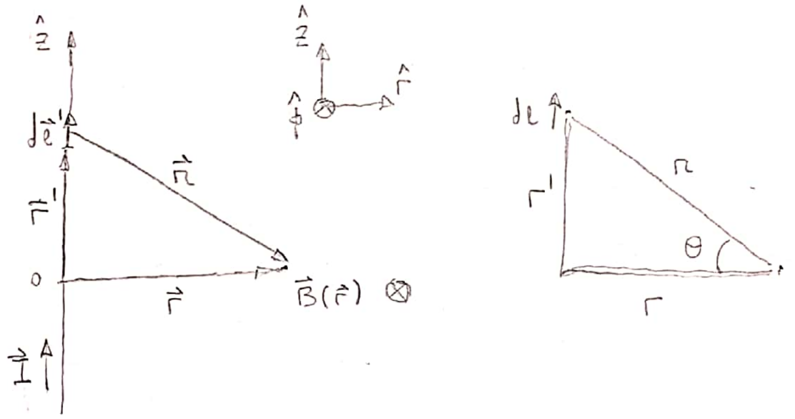
pero esta expresión es incorrecta.

Recordemos que la ley de Biot-Savart vale para corrientes estacionarias. No es el caso de la carga puntual!

Para cargas moviéndose lentamente ($v \ll c$, es decir lejos del régimen relativista) la fórmula es una buena aproximación.

Pero que quede claro que no entra dentro de las condiciones de validez de la ley de Biot-Savart.

Ejemplo: el campo magnético de un hilo recto.



Por un hilo (en principio finito) circula una corriente estacionaria

Calculemos el campo $\vec{B}$ a una distancia $\vec{r}$ del hilo

Elegimos un sistema de coordenadas cilíndricas con $\hat{z} \parallel \vec{I}$

y el origen en el punto más cercano del hilo a $\vec{r}$.

(149.1) $$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \int \frac{1}{\mathcal{R}^2} \cdot \underbrace{d\vec{\ell}' \times \hat{\mathcal{R}}}_{=?}$$

En nuestro sistema de coordenadas:

$$d\vec{\ell}' = d\ell' \, \hat{z}$$

$$\vec{r} = r \, \hat{r}$$

$$\vec{r}' = r' \, \hat{z}$$

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{r} - \vec{r}' = r\hat{r} - r'\hat{z}$$

$$d\vec{\ell}' \times \vec{\mathcal{R}} = d\ell' \hat{z} \times (r\hat{r} - r'\hat{z}) = r \, d\ell' \, \hat{\phi} \qquad (\hat{z} \times \hat{z} = 0 \;,\; \hat{z} \times \hat{r} = \hat{\phi})$$

(149.2) $$\therefore d\vec{\ell}' \times \hat{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}} \, d\vec{\ell}' \times \vec{\mathcal{R}} = \frac{r}{\mathcal{R}} \, d\ell' \, \hat{\phi} = \frac{r}{\mathcal{R}} \, dz \, \hat{\phi}$$

- Ahora, mientras que r es cte. en la integral (149.1), $\mathcal{R}$ y z varían

$$\mathcal{R} \cos\theta = r \quad \rightarrow \quad \frac{r}{\mathcal{R}} = \cos\theta \quad ; \quad \frac{1}{\mathcal{R}^2} = \frac{1}{r^2} \cos^2\theta$$

$$\mathcal{R} \sin\theta = z$$

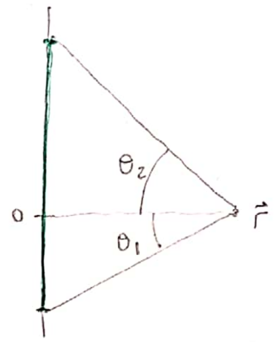
$$\Rightarrow \quad z = r \, tg\,\theta \quad \rightarrow \quad dz = r \, \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\therefore \frac{1}{\mathcal{R}^2} \cdot d\vec{\ell}' \times \hat{\mathcal{R}} = \underbrace{\frac{1}{r^2} \cancel{\cos^2\theta}}_{} \cdot \underbrace{\cos\theta}_{} \cdot \underbrace{r \frac{d\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}}_{} \, \hat{\phi} = \frac{1}{r} \cos\theta \, d\theta \, \hat{\phi} \quad \Big\}$$

como en otras ocasiones, resulta conveniente integrar en θ ...

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{r} \cos\theta \, d\theta \, \hat{\phi}$$

donde θ_1, θ_2 son los ángulos que delimitan la extensión del hilo (finito).



(150.1) $$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cdot \sin\theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cdot (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

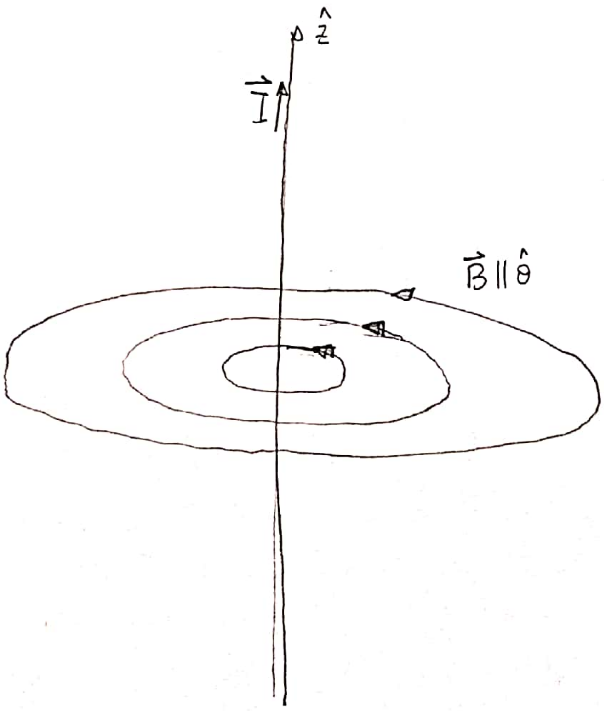
<u>obs</u>. Para casos particulares habrá que evaluar $\sin\theta_2$ y $\sin\theta_1$ en función de la geometría de la configuración.

Es interesante el caso límite de un hilo infinito:

$\theta_1 \to -\pi/2$

$\theta_2 \to \pi/2$

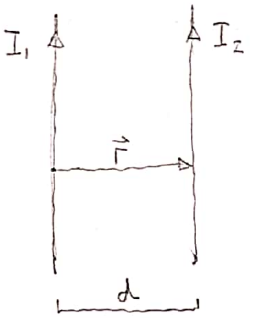
(150.2) $$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}}$$ campo magnético de un hilo infinito de corriente estacionaria.



- las líneas del campo $\vec{B}$ son círculos concéntricos
- $B \sim 1/r$

Ejemplo: fuerza entre dos hilos de corriente.

Ahora que sabemos calcular el campo de un hilo (150.2) y la fuerza sobre un hilo (147.2) podemos calcular la fuerza entre dos hilos de corriente como en los experimentos de Oersted.



- por dos cables paralelos circulan corrientes I_1, I_2.
- están separados una distancia d.
- ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud entre los cables?
- calculemos la fuerza sobre el cable (2), $\vec{F}_{12}$

$$\vec{F}_{12} = \int I_2\, d\vec{\ell} \times \vec{B}_1 \qquad \text{con} \qquad \vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \cdot \hat{\theta}$$

$$d\vec{\ell} = d\ell\, \hat{z} \qquad \text{y} \qquad \hat{z} \times \hat{\theta} = -\hat{r}$$

$$\vec{F}_{12} = \int I_2\, d\ell\, \hat{z} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\, \hat{\theta}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} (-) \hat{r} \underbrace{\int d\ell}_{=L}$$

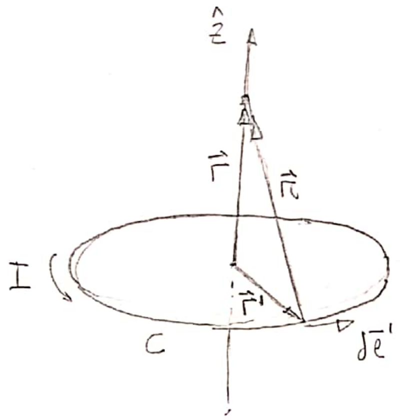
vemos que si el signo de I_1 e I_2 es el mismo, la fuerza es atractiva; y si es diferente, la fuerza será repulsiva.

$\int d\ell = L$ la longitud del segmento considerado

La fuerza por unidad de longitud $f \equiv F/L$ es

$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

Ejemplo: campo magnético sobre el eje de una espira por la que circula una corriente estacionaria.



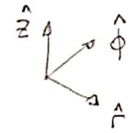
Evaluamos el campo $\vec{B}(\vec{r})$ sobre el eje $\hat{z}$.

$\vec{r} = z\,\hat{z}$ | $\vec{\pi} = \vec{r} - \vec{r}' = z\,\hat{z} - R\,\hat{r}$

$\vec{r}' = R\,\hat{r}$ | $\pi^2 = R^2 + z^2$

$\vec{dl}' = dl'\,\hat{\phi}$

en coordenadas cilíndricas con el origen en el centro de la espira.

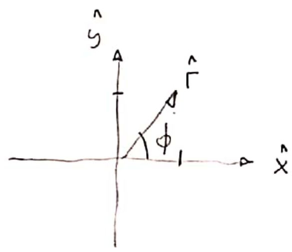


$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{1}{\pi^2} \cdot \vec{dl}' \times \hat{\pi}$$

$$\vec{dl}' \times \vec{\pi} = dl'\,\hat{\phi} \times (z\,\hat{z} - R\,\hat{r}) = dl'\,z\,\hat{r} + dl'\,R\,\hat{z}$$

$\pi = |\vec{\pi}| = (R^2 + z^2)^{1/2}$ es constante en la integral.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{\pi^3} \cdot \int (z\,dl'\,\hat{r} + R\,dl'\,\hat{z})$$



- $\int z\,dl'\,\hat{r} = z \int dl'\,\hat{r} = *$

$$\hat{r} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} \quad , \quad dl' = R\,d\phi$$

$$* = z \cdot \int_0^{2\pi} R\,d\phi\,(\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y})$$

$$= zR \left\{ \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\phi\,d\phi}_{=0}\,\hat{x} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\phi\,d\phi}_{=0}\,\hat{y} \right\} = \vec{0}$$

- esto refleja la simetría de la configuración de corriente: para cada elemento de corriente hay otro elemento del otro lado de la espira que cancela la contribución a la componente $\hat{r}$ del campo. Como consecuencia $\vec{B} \parallel \hat{z}$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot R\,\hat{z} \cdot \underbrace{\oint_C dl'}_{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{2\pi R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\,\hat{z} \quad \Big\}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\,\hat{z}} \qquad (152.1)$$