

repaso de electrostática.

ley de coulomb:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{todo}} \frac{\rho(\vec{r}')}{r^2} \hat{r} d\omega' \quad \xrightarrow{(2)} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad ; \quad \nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

carga puntual:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad \xrightarrow{(1)} \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_e}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\xrightarrow{\quad} \nabla \times \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{superposición})$$

magnetostática.

ley de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{1}{r^2} (d\vec{\ell}' \times \hat{r})$$

hilo infinito recto:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad \xrightarrow{?}$$

HOY!

$$\xrightarrow{?} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad (\text{ley de Ampere})$$

Ley de Ampère, Ecs. de Maxwell para magnetostática.

153

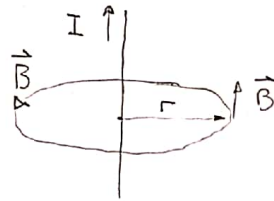
Vamos a calcular la $\text{div } \vec{B}$ y el $\text{rot } \vec{B}$. Por el teorema de Helmholtz sabemos que con estas ecuaciones diferenciales (junto con condiciones de contorno, por ejemplo $\vec{B} \rightarrow \vec{0}$ en ∞) el campo queda bien determinado.

La idea es análoga al plan que desarrollamos para la electrostática, donde de la ley de Coulomb y el principio de superposición derivamos las ecs. $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ y $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$.

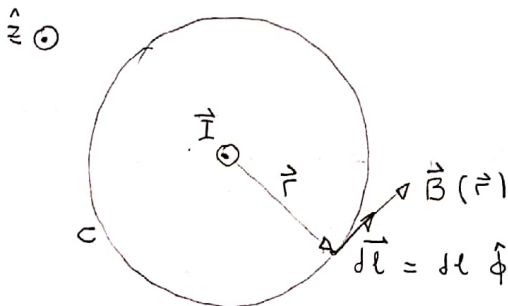
En electrostática siempre empezábamos por evaluar la situación más simple: una carga puntual.

En magnetostática, la configuración más sencilla va a ser un hilo recto e infinito de corriente, como resolvimos hace un rato:

$$(153.1) \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$



Si miramos desde la perspectiva del eje \hat{z} :

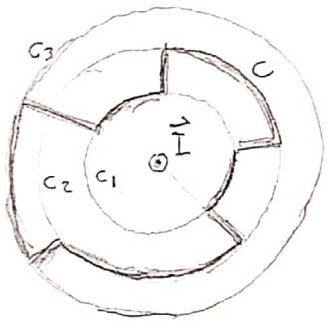


Vamos a calcular la integral de línea a lo largo de una curva C de radio constante r :

$$(153.2) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \cdot dl \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \underbrace{\oint dl}_{2\pi r} = \mu_0 I.$$

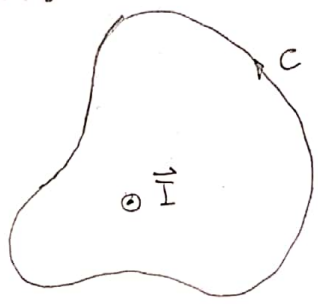
$$(153.3) \quad \therefore \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad \bullet \text{ es independiente de } r: \text{ al alejarnos, } B \sim 1/r \text{ decrece y la longitud del camino crece } \sim r.$$

Este resultado tan particular para un camino circular, en realidad es válido para cualquier camino que encierre al hilo de corriente una vez.



Por ejemplo para este camino formado por tramos circulares y radios entre ellos, la integral de línea no suma cuando nos movemos radialmente.

Lo mismo va a ser cierto para un camino arbitrario, que podemos descomponer en segmentos infinitesimales radiales y circulares.



Más formalmente, si escribimos el $d\vec{\ell}$ en coordenadas cilíndricas:

(154.1) $d\vec{\ell} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$

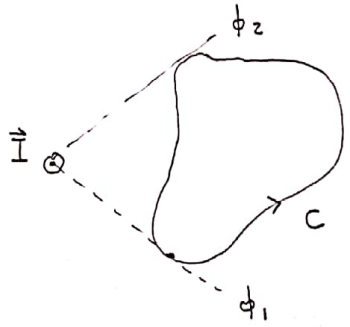
(154.2) $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \hat{\phi} \cdot (dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z})$

$$\begin{cases} \hat{\phi} \cdot \hat{r} = 0 \\ \hat{\phi} \cdot \hat{z} = 0 \\ \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} = 1 \end{cases}$$

(154.3) $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot d\phi$
= etc.

$\therefore \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\phi = \mu_0 I$ (154.4)

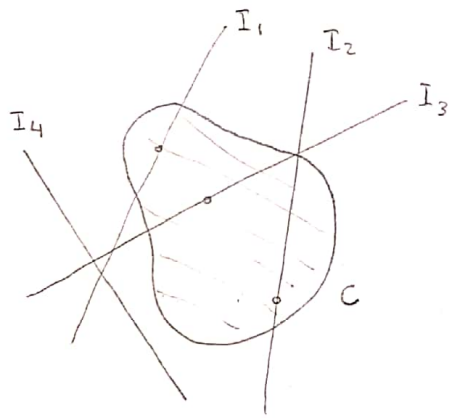
Por otro lado, si la curva C no encierra al hilo I ;



$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$. (154.5)

ya que la integral va de un ángulo ϕ_1 a un ángulo ϕ_2 y vuelve al mismo ϕ_1 .

Si ahora consideramos un conjunto de hilos rectos infinitos 155



por el principio de superposición

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc} \quad (155.1)$$

donde I_{enc} es la suma de las corrientes encerradas por el camino de circulación C .

Las corrientes no encerradas no contribuyen a (155.1) por (154.5)

Podemos escribir las corrientes en función de una distribución de corriente volumétrica \vec{J} (los hilos cuentan como δ de Dirac)

de modo que

$$(155.2) \quad I_{enc} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \text{con } S \text{ una superficie de borde } C.$$

Entonces:

$$(155.3) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Por el teorema de Stokes,

$$(155.4) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

$$(155.5) \quad \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Como esto vale para cualquier superficie S , resulta

$$(155.6) \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

En esta derivación empezamos con la expresión de \vec{B} para hilos rectos e infinitos de corriente.

Vamos a generalizar esta ecuación mas adelante.

Comenzaremos con la ley de Biot-Savart:

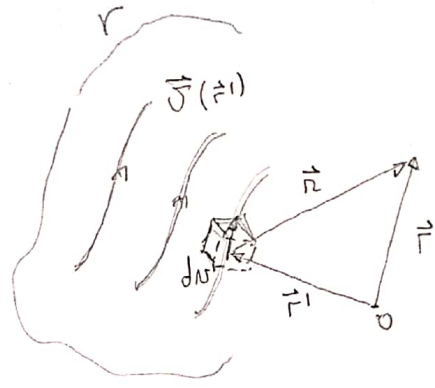
$$(156.1) \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r^2} \vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r} \, d\Omega'$$

para una distribución espacial $\vec{J}(\vec{r}')$
de corriente -

Como siempre:

$$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$$

La integral se calcula sobre las coordenadas primadas \vec{r}' .



Divergencia de \vec{B} , vamos a calcular primero $\nabla \cdot \vec{B}$

$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ y el operador ∇ deriva con respecto a \vec{r} .

$$(156.2) \quad \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \nabla \cdot \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) d\Omega'$$

$$(156.3) \quad \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad (\text{ver demo})$$

$$(156.4) \quad \therefore \nabla \cdot \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot (\nabla \times \vec{J}(\vec{r}')) - \vec{J}(\vec{r}') \cdot \left(\nabla \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right)$$

$$(156.5) \quad \nabla \times \vec{J}(\vec{r}') = \vec{0} \quad \text{porque } \vec{J} \text{ no depende de } \vec{r}.$$

$$(156.6) \quad \nabla \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \vec{0} \quad \text{También. Veámoslo:}$$

• una función $\vec{f} = f_r \hat{r} + f_\theta \hat{\theta} + f_\phi \hat{\phi}$ en esféricas, el rot.

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta f_\phi) - \frac{\partial f_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r}$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r f_\phi) \right) \hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r f_\theta) - \frac{\partial f_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$

$$\text{si } \vec{f} = \frac{\hat{r}}{r^2} = f_r(r) \hat{r} \quad ; \quad f_r(r) \text{ no depende ni de } \theta \text{ ni de } \phi$$

$$\therefore \nabla \times \vec{f} = \vec{0}.$$

$$(156.7)$$

$$\therefore \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

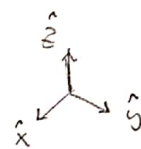
$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\vec{A} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

$$\vec{B} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} \times \hat{x} &= \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0 \\ \hat{x} \times \hat{y} &= \hat{z} \\ \hat{y} \times \hat{z} &= \hat{x} \\ \hat{z} \times \hat{x} &= \hat{y} \end{aligned} \right\}$$



$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \times (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{z}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \partial_x (a_y b_z - a_z b_y) + \partial_y (a_z b_x - a_x b_z) + \\ &\quad + \partial_z (a_x b_y - a_y b_x) = \end{aligned}$$

$$= (\partial_x a_y) \overbrace{b_z} + a_y (\partial_x b_z) - (\partial_x a_z) \overbrace{b_y} - a_z (\partial_x b_y)$$

$$+ (\partial_y a_z) \overbrace{b_x} + a_z (\partial_y b_x) - (\partial_y a_x) \overbrace{b_z} - a_x (\partial_y b_z)$$

$$+ (\partial_z a_x) \overbrace{b_y} + a_x (\partial_z b_y) - (\partial_z a_y) \overbrace{b_x} - a_y (\partial_z b_x)$$

$$= b_x (\partial_y a_z - \partial_z a_y) + b_y (\partial_z a_x - \partial_x a_z) + b_z (\partial_x a_y - \partial_y a_x)$$

$$+ a_x (\partial_y b_z - \partial_z b_y) - a_y (\partial_z b_x - \partial_x b_z) - a_z (\partial_x b_y - \partial_y b_x)$$

$$= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

Rotor de \vec{B} . Aplicamos el rotor a la ley de Biot-Savart 157

$$(157.1) \quad \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left[\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{n}}{r^2} \right] dV'$$

Ahora tenemos el rotor de un producto vectorial:

$$(157.2) \quad \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A})$$

En nuestro caso $\vec{A} = \vec{J}(\vec{r}')$ no depende de $\vec{r} \Rightarrow$ sus derivadas son 0.
Esto mata el primero y cuarto términos. Queda:

$$(157.3) \quad \nabla \times \left[\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{n}}{r^2} \right] = - \left(\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla \right) \frac{\hat{n}}{r^2} + \vec{J}(\vec{r}') \left(\nabla \cdot \frac{\hat{n}}{r^2} \right)$$

$\nabla \cdot \frac{\hat{n}}{r^2} = ??$ quizá me recuerden de exilos como F3 - Episodio I
ni mas ni menos que la delta de Dirac (ver p-15-17)

$$(157.4) \quad \nabla \cdot \frac{\hat{n}}{r^2} = 4\pi \delta^3(\vec{n})$$

En cuanto al primer término en (157.3), vamos a tener que trabajar un poco más...

Vamos a considerar la integral de este término

$$(157.5) \quad \int (-) \left(\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla \right) \frac{\hat{n}}{r^2} dV = ?$$

y para poder integrar por Gauss, vamos a recurrir a el truco de reescribir la derivada: $\nabla \nabla \rightarrow \nabla'$

$$(157.6) \quad - \left(\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla \right) \frac{\hat{n}}{r^2} = + \left(\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla' \right) \frac{\hat{n}}{r^2}$$

podemos hacer este cambio de variable de derivación junto al cambio de signo porque $\vec{n} = \vec{r} - \vec{r}'$,

$$\text{y } \partial_x f(x-x') = -\partial_{x'} f(x-x')$$

Ahora, $\vec{J} \cdot \nabla'$ es un operador diferencial escalar que está actuando sobre el vector (\hat{n}/r^2) . Este vector tiene

componentes $\left(\frac{\hat{n}}{r^2} \right)_\mu$ con $\mu = x, y, z$, cada una un campo escalar.

$$(158.1) \quad \nabla \cdot (f \vec{A}) = f (\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla f$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \nabla f = \nabla \cdot (f \vec{A}) - f (\nabla \cdot \vec{A})$$

en nuestro caso $\vec{A} = \vec{J}(\vec{r}')$ y el campo escalar $f = \left(\frac{\hat{n}}{r^2}\right)_\mu$ es cada una de las componentes por separado.

$$(158.2) \quad \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{\hat{n}}{r^2}\right)_\mu = \nabla' \cdot \left[\left(\frac{\hat{n}}{r^2}\right)_\mu \vec{J}(\vec{r}')\right] - \left(\frac{\hat{n}}{r^2}\right)_\mu (\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}'))$$

Para una corriente estacionaria, tendremos (ec. 116.1)

$$(158.3) \quad \nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}') = 0$$

con lo que solo sobrevive el primer término: ecs. (157.5, 157.6, 158.1)

$$(158.4) \quad \int_V (-) (\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla) \frac{\hat{n}}{r^2} dV' = \int_V \nabla' \cdot \left(\left(\frac{\hat{n}}{r^2}\right)_\mu \vec{J}(\vec{r}')\right) dV' = * \quad \forall \mu$$

y por el Teorema de Gauss tenemos para cada componente μ :

$$(158.5) \quad * = \oint_S \left(\frac{\hat{n}}{r^2}\right)_\mu \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}$$

- Ahora que pudimos escribir la integral de esta manera, fíjense que el volumen V sobre el que está evaluada la integral (158.4) es el volumen que contiene la corriente \vec{J} en la ley de Biot-Savart (156.1). La superficie S en (158.5) es la frontera, el borde, que encierra al volumen V .
- Como $\vec{J}(\vec{r}') = \vec{0}$ fuera del volumen V , podemos "expandir" el volumen de integración hacia fuera de la región que contiene la corriente: como $\vec{J} = \vec{0}$ allí, no cambia el valor de la integral (156.1). Y ahora viene lo lindo después de tanto remar; la superficie \tilde{S} que rodea al volumen expandido \tilde{V} está fuera de la región que contiene la corriente, $\vec{J} = \vec{0}$ sobre \tilde{S} , con lo cual la integral (158.5) es nula: $* = 0$.

Resumiremos. Ley de Ampère-

Estamos calculando $\nabla \times \vec{B}$, ver ec. (157.1)

Reescribimos el rotacional dentro de la integral y vimos que tiene dos términos, ec. (157.3).

La integral del primer término se anula (lo vimos recién) y el segundo término es $\vec{J}' \times$ delta de Dirac, ec. (157.4).

Entonces, juntando las piezas:

(159.1) $\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \cdot 4\pi \delta^3(\vec{r}) dV'$ con $\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$

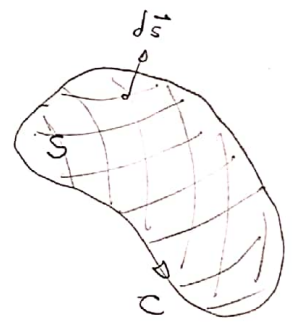
(159.2) $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$

Esta es la ec. que estábamos buscando.

Es la ley de Ampère en su forma diferencial.

Integrando en una superficie

(159.3) $\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{enc}$



y usando el Teorema de Stokes

(159.4) $\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$

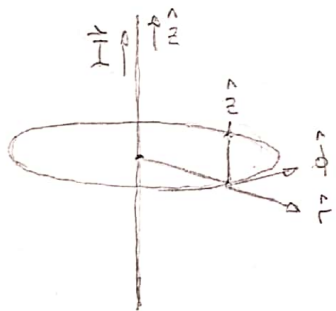
Resulta la forma integral de la ley de Ampere

(159.5) $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$

donde I_{enc} es la corriente encerrada por la curva de circulación C .

Al igual que con el Teorema de Stokes, debemos elegir una orientación para la superficie, y su relación con la circulación del borde. Usamos la regla de la mano derecha: si circulamos el borde en la dirección de los dedos, el pulgar define la dirección de una corriente positiva.

Consideremos un hilo de corriente estacionaria I , recto, infinito.



Empleamos un sistema de coordenadas cilíndricas para sacar provecho de las simetrías de la distribución de cargas.

En general el campo $\vec{B}(\vec{r})$ dependerá de las tres coordenadas y tendrá tres componentes:

$$(160.1) \quad \vec{B}(\vec{r}) = B_r(r, \phi, z) \hat{r} + B_\phi(r, \phi, z) \hat{\phi} + B_z(r, \phi, z) \hat{z}$$

- Si desplazamos la distribución de corriente a lo largo del eje \hat{z} ésta permanece invariante. Luego \vec{B} no puede depender de z .
- Si rotamos la corriente un ángulo ϕ con respecto al eje \hat{z} también permanece invariante $\Rightarrow \vec{B}$ no depende de ϕ .

$$(160.2) \quad \therefore \vec{B} = \vec{B}(r) = B_r(r) \hat{r} + B_\phi(r) \hat{\phi} + B_z(r) \hat{z}$$

• Por la ley de Biot-Savart

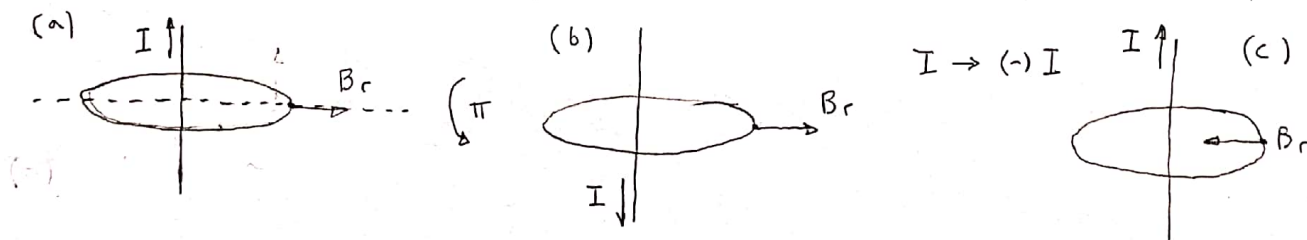
$$(160.3) \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{I} \times \hat{r}}{r^2}$$

como en la distribución de corriente $d\vec{I} = dI \hat{z} \parallel \hat{z}$

Todos los elementos de corriente están alineados en $\hat{z} \therefore d\vec{B} \perp \hat{z}$

es decir $\vec{B} \perp \hat{z}$; con lo que el campo no puede tener una componente en la dirección \hat{z} : $B_z \equiv 0$.

• Imaginemos que el campo tiene una componente $B_r \neq 0$.



Una rotación de π alrededor de \hat{r} invierte la corriente sin cambiar B_r ; seguida de un cambio de signo en I que vuelve a invertir la corriente pero ahora invirtiendo B_r , por (160.3)

al cabo de estas dos transformaciones la distribución de corrientes quedó invariante poro $B_r \rightarrow (-) B_r$.

Luego $B_r = 0$, la única componente posible es $B_\phi(r)$:

$$(161.1) \vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(r) \hat{\phi} = B(r) \hat{\phi}$$

Ahora que sabemos la pinta que tiene \vec{B} , podemos elegir una curva C que nos permita evaluar la integral de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

en este caso elegimos una curva circular de radio r .

$$(161.2) \oint_{C(r)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B(r) \hat{\phi} \cdot dl \hat{\phi} = B(r) \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi r} dl}_{=1} \underbrace{\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}}_{=1} = 2\pi r B(r)$$

La corriente encerrada por esta curva es $I_{enc} = I$.

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \quad \therefore B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$(161.3) \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}}$$

Es el mismo resultado que obtuvimos por integración directa de la ley de Biot-Savart, ec. (150.2).