Relatividad en Electrodinámica.

- En mecánica clásica, las mismas leyes se aplican en cualquier sistema de referencia inercial (definido como un sistema de ref. en el que vale la primera ley de Newton). Principio de relatividad.

- En electrodinámica nos encontramos con algunas situaciones que parecieran contradecir ésta idea.

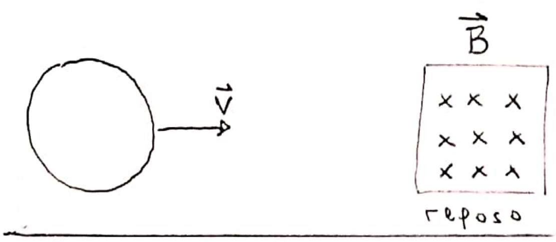
! Por ejemplo, una carga en movimiento produce un campo magnético, pero si me muevo en un sistema de referencia solidario a la carga esta estará en reposo y por lo tanto... no habrá campo magnético...

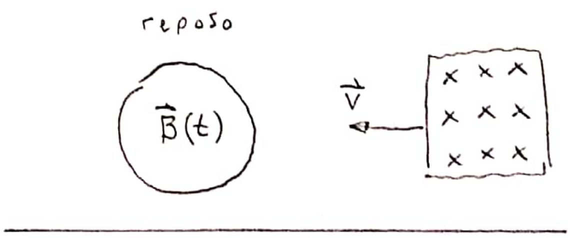
La fuerza de Lorentz depende de la velocidad de la carga. Entonces que pasa si me muevo en distintos sistemas de referencia inerciales, ¿la fuerza es diferente?

- Sin embargo, hemos visto que hay ciertas coincidencias que parecieran conspirar para que el resultado sea el mismo independientemente del movimiento relativo.

Los experimentos de Faraday ponen en evidencia ésta coincidencia. (p. 207). Repasemos un poco esto.

Imaginen que colocamos una espira conductora en un tren que viaja a velocidad constante. El tren pasa por una zona en la que hemos dispuesto un imán – en reposo – que genera un campo magnético. Como la espira es un material conductor en movimiento, al pasar por la región en la que hay un campo magnético aparece una fem de movimiento (p. 200), debida a la fuerza magnética de Lorentz.





Esta fem estará dada por la ley del flujo para esta situación (ec. 204.4 y 206.3)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}.$$

Pensemos ahora como se ven las cosas para un observador que viaja en el tren. En el tren, la espira está en reposo. Por lo tanto las cargas están en reposo y no hay ninguna fuerza magnética que actúe sobre ellas. Sin embargo, al acercarse a la zona en la que colocamos el imán, el campo magnético que mide un observador en el tren va a cambiar. Y un campo magnético dependiente del tiempo genera un campo eléctrico por la ley de Faraday (209.2) La fuerza eléctrica genera una fem en la espira dada por (209.3)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}.$$

Entonces, ambos observadores predicen la misma fem $\mathcal{E}$.

¡Pero la interpretacion física del fenómenib es completamente diferente! ¿Quien tiene razón?

Antes de Einstein, la gente pensaba que esto era una mera coincidencia y que la interpretación "correcta" es la del observador en reposo con respecto a las vías. Pensaban que el observador en el tren estaba en movimiento con respecto al eter, el medio cuyas perturbaciones y deformaciones daban lugar al $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

Para identificar el sistema de referencia del eter, Michelson y Morley construyeron un interferómetro muy preciso que les permitiría medir la velocidad de la luz en diferentes direcciones.

La idea era que la luz, como radiación electromagnética, era una perturbación de éste medio, del mismo modo que las ondas en el agua son desplazamientos locales del medio. Entonces la velocidad de la luz debería ser diferente dependiendo de nuestro movimiento con respecto al medio.

El resultado del experimento fue sorprendente:
la velocidad de la luz era la misma en todas direcciones!

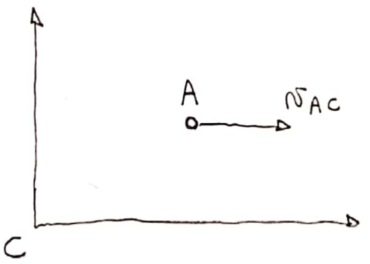
Motivado por las "coincidencias" de la electrodinámica y por estos resultados experimentales, Einstein postula:

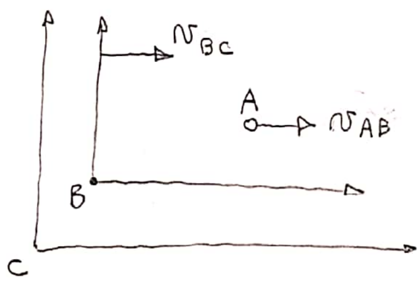
(1) Principio de relatividad: las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.

(2) La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores inerciales (no importa el movimiento de la fuente!)

En otras palabras, (1) no hay un sistema de referencia en reposo absoluto y (2) no hay eter.

Hay que decir que el segundo postulado es bastante difícil de aceptar, ya que va en contra del sentido común. Supongamos que algo (A) se mueve con respecto al piso (C) con velocidad v_{AC}.





Si ahora consideramos el movimiento de A con respecto a otro sistema de referencia B que se mueva con velocidad v_{BC} con respecto a C, la velocidad de A en B será $v_{AB} \neq v_{AC}$:

(1) $$v_{AC} = v_{BC} + v_{AB}$$

El segundo postulado nos dice que si A es luz, entonces

(2) $$v_{AC} = v_{AB} = c \quad !$$

La ecuación (1) es incompatible con el segundo postulado y debe ser corregida. Luego veremos que

(3) $$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + (v_{AB} v_{BC} / c^2)}$$ (regla de suma de velocidades de Einstein)

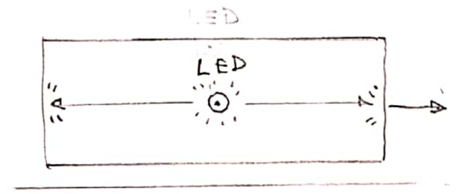
Para velocidades pequeñas, $v_{AB}, v_{BC} \ll c$ (3) se reduce a (1).

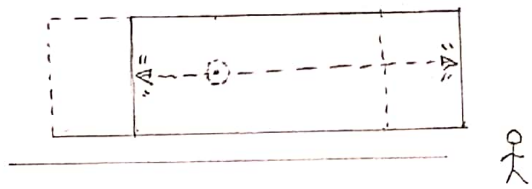
Y si consideramos $v_{AB} = c$, resulta $v_{AC} = c$, de acuerdo con el segundo postulado.

Algunas consecuencias de los postulados de Einstein.

- La simultaneidad es relativa.

Imaginen un vagón viajando a velocidad constante en línea recta. A mitad del vagón hay un LED apagado. Al prenderlo, la luz viaja en todas direcciones con la misma velocidad c. Como la distancia del LED a los bordes del vagón es la misma, la luz llega al mismo tiempo a la pared anterior y a la posterior: los dos eventos son simultáneos.

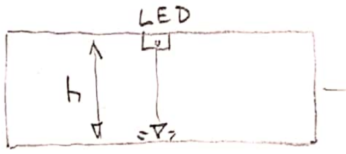


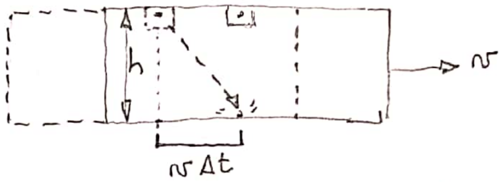


Ahora, para un observador en las vías, la luz emitida por el LED también viaja a velocidad c hacia delante y hacia atrás. Pero como el tren avanza sobre las vías, el viaje de la luz hacia atrás es mas corto que el viaje hacia delante. La luz llega antes a la pared posterior que a la pared anterior del vagón. Por lo tanto, estos eventos —la llegada de la luz a cada pared— no son simultáneos para un observador en las vías!

• Dilatación temporal.

Consideremos un rayo de luz que parte del LED y viaja hacia el piso del vagón, justo debajo.





Para un observador situado en el vagón, el tiempo que tarda en llegar la luz es (usamos una barra para denotar cantidades medidas en el vagón):

$$\Delta \bar{t} = \frac{h}{c}$$

Para un observador en las vías, el mismo rayo viaja también con velocidad c, pero en diagonal. La distancia recorrida no es h sino $\sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2}$. Entonces el tiempo que tarda la luz en llegar

$$\Delta t = \frac{\sqrt{h^2 + (v\,\Delta t)^2}}{c}$$

$$\Rightarrow \quad (c\,\Delta t)^2 = h^2 + (v\,\Delta t)^2$$

$$(c^2 - v^2)\,\Delta t^2 = h^2$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t^2 = \frac{h^2}{c^2} \qquad \therefore \quad \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\overbrace{\frac{h}{c}}^{\Delta \bar{t}}$$

$$\therefore \quad \Delta \bar{t} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\;\Delta t.$$

Introduciendo el factor $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

resulta:

$$\Delta t = \gamma\,\Delta \bar{t}$$ que se conoce como dilatación temporal.

Los relojes en movimiento "avanzan" más lentamente.

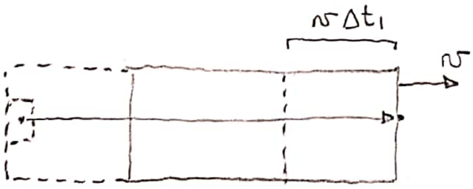
- <u>Contracción de longitud.</u> (o contracción de Lorentz)

El vagon viaja por la vía. Ahora estudiaremos el tiempo que tarda un rayo de luz, emitido por un LED en la pared posterior, en viajar hasta la pared anterior y volver reflejado por un espejo.

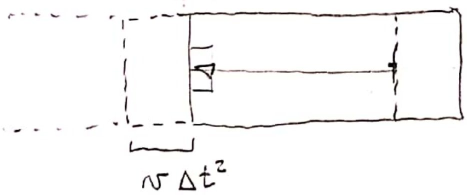
Un observador en el vagon ve que el rayo va y viene con velocidad c, atravesando el vagon en toda su longitud $\Delta\bar{x}$ dos veces.

$\Delta\bar{t} = 2\,\dfrac{\Delta\bar{x}}{c}$ es el tiempo que tarda en ir y venir.

Para un observador en las vías, el camino de ida es más largo que el de vuelta debido al movimiento del vagón, aunque la luz viaja con velocidad c:



$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x + v\Delta t_1}{c} \quad \therefore \quad \Delta t_1 = \frac{\Delta x}{c - v}$$



$$\Delta t_2 = \frac{\Delta x - v\Delta t_2}{c} \quad \therefore \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x}{c + v}$$

$\Rightarrow$ el tiempo total es $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \dfrac{\Delta x}{c - v} + \dfrac{\Delta x}{c + v} =$

$$\Delta t = \Delta x\,\frac{c + \cancel{v} + c - \cancel{v}}{(c - v)(c + v)} = \Delta x \cdot \frac{2c}{c^2 - v^2} = 2\,\frac{\Delta x}{c} \cdot \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

Por otro lado, Δt y $\Delta\bar{t}$ están relacionadas por la dilatación temporal:

$$\Delta\bar{t} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\;\Delta t$$

$$\therefore \quad \Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\Delta x \qquad \text{ó} \qquad \Delta\bar{x} = \gamma\,\Delta x \quad \}$$

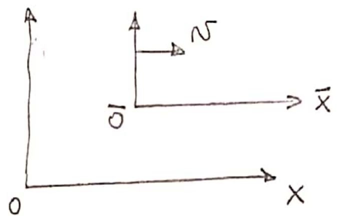
Transformaciones de Lorentz-

Las Transformaciones de Lorentz incorporan estos aspectos de la teoría de la relatividad. Las formulas que expresan el cambio de coordenadas entre dos sistemas de referencia O y $\bar{O}$ son

$$\bar{x} = \gamma\,(x - v t)$$

$$\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$\gamma^{-1} \equiv \sqrt{1 - v^2/c^2}$$



Regla de adición de velocidades:

Si una partícula se desplaza una distancia dx en un tiempo dt para el observador O, el observador $\bar{O}$ medirá un desplazamiento $d\bar{x}$ y un tiempo $d\bar{t}$

$$d\bar{x} = \gamma\,(dx - v\,dt)$$

$$d\bar{t} = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

Entonces las velocidades son

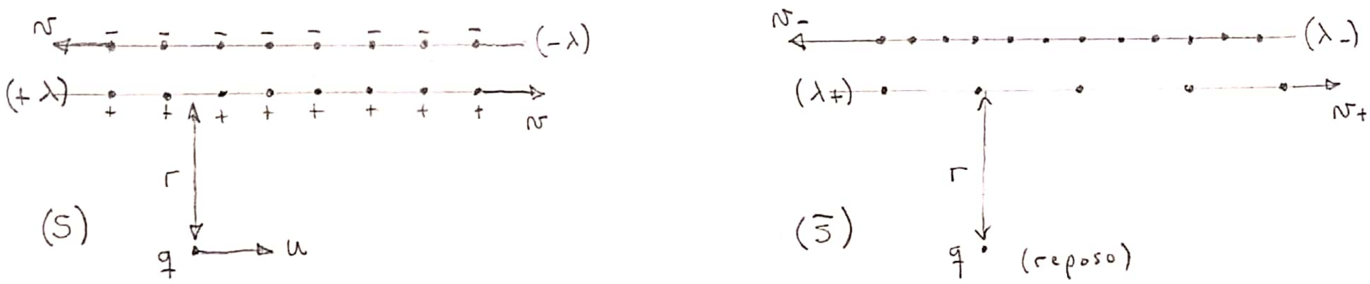
. en O: $\quad u = \dfrac{dx}{dt}$

. en $\bar{O}$: $$\bar{u} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\gamma\,(dx - v\,dt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{dx/dt - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \quad \Big\}$$

como habíamos anticipado en (271.3), donde (A) es la partícula, C es $\bar{O}$ y B es O; $u = v_{AB}$, $\bar{u} = v_{AC}$ y $v = v_{CB} = -v_{BC}$

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + (v_{AB}v_{BC}/c^2)} \quad \Big\}$$

El magnetismo como consecuencia de la Relatividad



Imaginen dos líneas de carga, una con cargas positivas y otra con cargas negativas, moviendose en direcciones opuestas con una velocidad v. (En el dibujo están separadas pero imaginémoslas superpuestas). Supongamos que las cargas estan separadas por una distancia despreciable y que podemos considerar dos hilos con densidad de carga $\pm\lambda$. Entonces Tendremos una corriente hacia la derecha, de módulo

$$I = 2\lambda v$$ (recordar p. 112)

A una distancia r del hilo hay una carga q que se mueve hacia la derecha con una velocidad u, $(u < v)$.

Como las dos lineas de carga se cancelan mutuamente, en este sistema de referencia (que llamaremos S) no hay campo eléctrico ni fuerza eléctrica sobre q.

- Consideremos ahora la situación desde el punto de vista de un observador $\bar{S}$ que se mueve junto con la carga a velocidad u. En este sistema de referencia, la carga está en reposo (y por lo tanto no puede haber una fuerza magnética).

Sin embargo, la regla de adición de velocidads nos dice que en $\bar{S}$ las líneas de carga se mueves a distintas velocidades:

$$v_\pm = \frac{v \mp u}{1 \mp vu/c^2}$$

como $v_- > v_+$ resulta que la contraccion de Lorentz es mayor para la linea cargada negativamente.

En consecuencia la densidad de carga se verá afectada!

$$\lambda_\pm = \pm \gamma_\pm \lambda_0$$

donde λ_0 es la densidad de carga en reposo, y

$$\gamma_\pm = \frac{1}{\sqrt{1 - v_\pm^2/c^2}}$$

OJO: en S, la densidad de carga es $\lambda = \gamma \lambda_0 \neq 0$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Podemos reescribir un poco $\gamma_\pm$:

$$\gamma_\pm = \left(1 - \frac{v_\pm^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{(v \mp u)^2}{(1 \mp vu/c^2)^2}\right)^{-1/2}$$

$$= \left[\frac{(c \mp vu/c)^2 - (v \mp u)^2}{(c \mp vu/c)^2}\right]^{-1/2} = \frac{c \mp vu/c}{\left[(c \mp vu/c)^2 - (v \mp u)^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{c^2 \mp vu}{\left[(c^2 \mp vu)^2 - c^2 (v \mp u)^2\right]^{1/2}} =$$

$$= \frac{c^2 \mp vu}{\sqrt{(c^2 - v^2)(c^2 - u^2)}}$$

introduciendo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$,

$$\gamma_\pm = \gamma \cdot \frac{1 \mp uv/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \Big\}$$

Con este resultado podemos calcular la densidad de carga resultante en $\bar{S}$:

$$\bar{\lambda} = \lambda_+ + \lambda_- = (\gamma_+ - \gamma_-)\lambda_0 = \gamma \left(\frac{\cancel{1} - uv/c^2 - \cancel{1} - uv/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right) \lambda_0$$

$$\bar{\lambda} = \frac{-2\gamma \lambda_0 \, uv/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = -\frac{2 \lambda u v}{c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \Big\}$$

Encontramos que como consecuencia de las contracciones desiguales de los hilos que se mueven en dirección contraria, un observador móvil detecta una densidad neta $\bar{\lambda}$, en este caso negativa!

Este hilo de carga $\bar{\lambda}$ genera un campo eléctrico

$$\bar{E} = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi \varepsilon_0 r}$$ en la posición de la carga q.

En el sistema móvil, por lo tanto, la carga experimenta una fuerza eléctrica

$$\bar{F} = q\bar{E} = \frac{q\bar{\lambda}}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

$$\bar{F} = -\frac{\lambda v}{\pi \varepsilon_0 c^2 r} \frac{q u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} .$$

Si hay una fuerza en $\bar{S}$, habrá también una fuerza en S dada por las reglas de transformación para las fuerzas:

$$F = \sqrt{1-u^2/c^2}\ \bar{F}$$

$$\therefore \quad F = -\frac{\lambda v}{\pi \varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{q u}{r}$$

Como habíamos dicho al comienzo, esta fuerza no es una fuerza eléctrica, ya que el hilo no aparece cargado en S.

Se trata, claro, de la fuerza magnética.

Recordando que $c^2 \mu_0 \varepsilon_0 = 1$, y escribiendo λv en términos de la corriente $I = 2\lambda v$, resulta:

$$F = -q \cdot u \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)$$

Entre paréntesis nos encontramos el campo magnético debido a una corriente estacionaria en un cable largo (Ampére) y la fuerza coincide con la fuerza de Lorentz $\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$. que hubiéramos calculado en S.