Clase 11: Corriente

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

7 de Mayo de 2020

Corriente estacionaria

En esta guía vamos
a estudiar fenónemos que involucran
cargas en movimiento estacionario.
Con esto nos referimos a sistemas
en los cuales las cargas se mueven
de un modo tal que sus características
no varían en el tiempo. Se las
denomina **corrientes estacionarias**.

Definimos la corriente I
como la tasa a la cual la carga fluye a
través de una superficie dada (el área
encerrada por el marco de la figura).

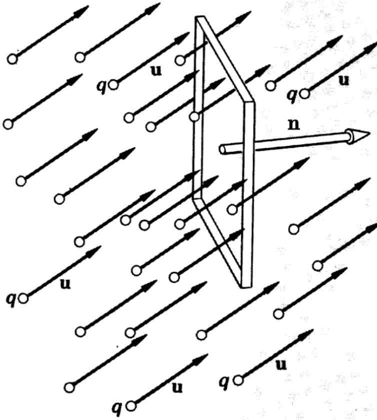


Figura tomada de Purcell

Corriente estacionaria

Es útil introducir la densidad de corriente $\vec{j} = \rho \cdot \vec{u}$ de modo tal que $d\mathrm{I} = \vec{j} \cdot \vec{dS}$ (donde $\vec{dS} = \hat{n} dS$) es la tasa a la que la carga atraviesa una superficie dS. Entonces, la corriente total es simplemente la integral de $d\mathrm{I}$

$$\mathrm{I} = \frac{dQ}{dt} = \int d\mathrm{I} = \int \vec{j} \cdot \vec{dS} \qquad (1)$$

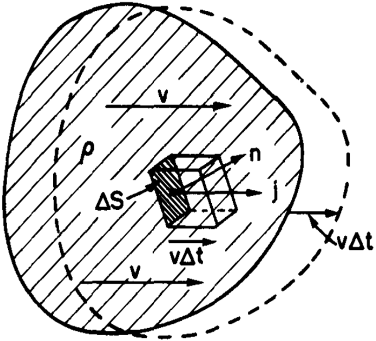


Figura tomada de Feynman Vol II

Unidades: Las unidades de corriente son $[\mathrm{I}] = \mathtt{C}/\mathtt{s}$ lo que se define como *Ampère* $\mathtt{A}$. La densidad de corriente tiene unidades de $[j] = \mathtt{A}/\mathtt{m}^2$.

Corriente estacionaria

Si consideramos una superficie cerrada, la variación de la cantidad de carga encerrada $Q_{enc} = \int \rho \, d^3x$ es igual al flujo de corriente que sale a través de la superficie, es decir

$$\frac{dQ_{enc}}{dt} = -\vec{j} \cdot d\vec{S}$$

y utilizando el teorema de Gauss obtenemos la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \qquad (2)$$

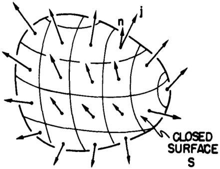


Figura tomada de Feynman Vol II

Corriente estacionaria

¿A qué nos referimos con corriente **estacionaria**?
En el **régimen estacionario** ni la densidad de corriente ni la densidad de carga **dependen explícitamente del tiempo** (puede depender de las coordenadas espaciales), es decir, $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{0}$ y $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.
Esto último, combinado con la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

no da como resultado

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \tag{3}$$

Problema 5: Tubo de vacío

En el Problema 5 nos dicen que tenemos un tubo de vacío en el cuál hay un capacitor de placas paralelas. La placa a potencial negativo se llama *cátodo* y la placa a potencial positivo se llama *ánodo*. Si se somente el cátodo a una temperatura alta éste empieza a emitir electrones que luego son acelerados hacia el ánodo debido a la diferencia de potencial entre las placas del capacitor. Nos piden hallar la densidad de carga ρ y la densidad de corriente $\vec{j}$.

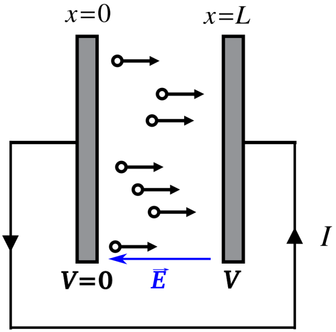
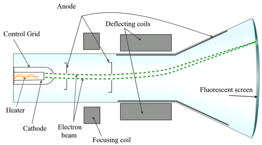
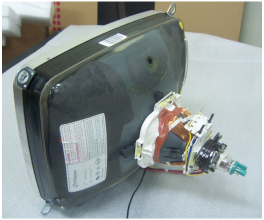


Figura tomada de Zangwill

Problema 5: Tubo de vacío





Cómo transformar tu tele de tubo en una 'smart TV' EL PAÍS VÍDEO

Imágenes tomadas de Wikipedia y Diario El País

Problema 5: Tubo de vacío

Cuando
la temperatura del ánodo es baja se emiten pocos electrones y basicamente la partícula emitida está sometida a un potencial lineal $V \simeq x$ (el correspondiente a un capacitor de placas paralelas, ver curva 1 en la figura).

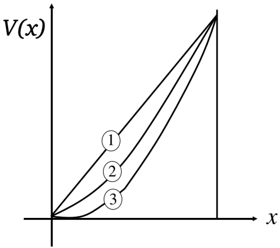


Figura tomada de Zangwill

A medida que se aumenta la temperatura se emiten más y más electrones y no es cierto que cada partícula está sometida únicamente al potencial de las placas sino que hay que tener en cuenta la repulsión entre los electrones mismos. En el problema nos dice que el potencial efectivo es de la forma

$$V(x) = ax^{4/3} \tag{4}$$

Problema 5: Tubo de vacío

Lo primero que vamos a hacer es determinar la velocidad que adquieren los electrones asumiendo que salien del cátodo con velocidad nula $u(x=0) \approx 0$ (despreciamos las componentes en las direcciones transversales). Esto se puede obtener de la ecuación de Newton para cada electrón (usar la regla de la cadena al integrar $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{dt}$)

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} = F = q_e E(x) = -e(-\frac{dV(x)}{dx}) \tag{5}$$

$$m_e \cdot u \cdot \frac{du}{dx} = e\frac{dV(x)}{dx} \tag{6}$$

$$\frac{1}{2} m_e u^2 = eV(x) \tag{7}$$

Problema 5: Tubo de vacío

Finalmente, llegamos a que

$$u(x) = \sqrt{\frac{2eV(x)}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\,e\,a}{m_e}}x^{2/3} \qquad (8)$$

Algo interesante de notar es que la densidad de carga ρ no va a ser homogénea dado que $u(x)$ no lo es.

Problema 5: Tubo de vacío

Recordemos que $\vec{j}$ tiene divergencia nula, entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} = \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

Entonces dado que $u \sim x^{2/3}$, entonces

$$\rho \sim x^{-2/3} \tag{10}$$

Esto nos dice que la concentración de electrones es mayor cerca del cátodo y es más baja cerca del ánodo. A su vez, la velocidad de los mismos es menor cerca del cátodo y es mayor cerca del ánodo (el campo eléctrico entre las placas los acelera).

Problema 5: Tubo de vacío

Para terminar de hallar la forma explícita de ρ y de j_x debemos recurrir a la ecuación de Poisson. Recordemos las relaciones entre ρ, V y $\vec{E}$

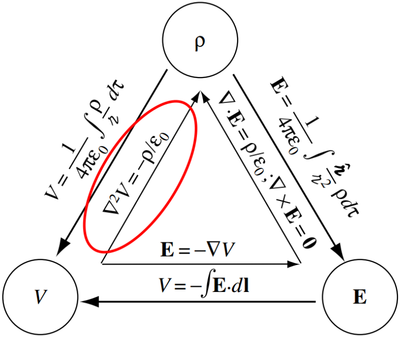


Figura tomada de Griffiths

Problema 5: Tubo de vacío

Entonces, de la ecuación de Poisson podemos obtener ρ

$$\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 V(x) = -\frac{4\epsilon_0 a}{9x^{2/3}} \tag{11}$$

Notemos que $\rho(x)$ tiene la dependencia que esperábamos.
Finalmente podemos obtener la densidad de corriente

$$j_x = \rho u = -\frac{4\epsilon_0 a}{9x^{2/3}} \sqrt{\frac{2\,e\,a}{m_e}} x^{2/3} = -\frac{4\epsilon_0 a^{3/2}}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \tag{12}$$

Que resulta ser constante, lo que es consistente con las hipótesis $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.