Clase 7: Capacitores

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

21 de septiembre de 2020

Capacitores

En esta clase vamos a estudiar los **capacitores** (o **condensadores**). Según la Wikipedia *un capacitor es un dispositivo electrónico que almacena energía eléctrica en un campo eléctrico*. En su versión más simple es básicamente un conductor cargado. El ejemplo más habitual consiste en dos placas enfrentadas cada una con cargas iguales y opuestas. En realidad cualquier sistema que consista de conductores cargados puede considerarse un capacitor. Los capacitores son uno de los componentes más usados en electrónica.

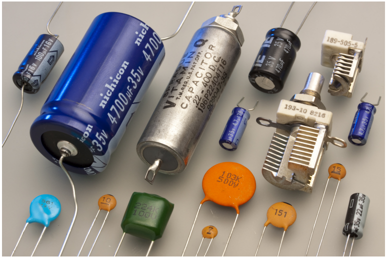
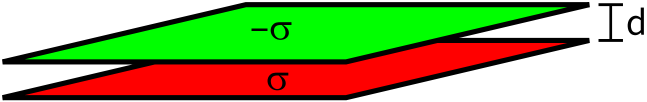


Figura: Diferentes tipos de capacitores. Fuente: Wikipedia.

Capacitores

Quizá la manera más práctica y clara de introducir el concepto de capacitor es considerar el arreglo de dos placas paralelas infinitas con cargas opuestas



El campo eléctrico de esta configuración se puede obtener por superposición dos placas infinitas con densidades de carga opuesta.

El campo eléctrico entre las placas es constante y vale

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z} \tag{1}$$

Calculemos ahora la diferencia de potencial entre las placas. Por convención lo vamos a calcular como el valor más alto del potencial (en la placa positiva) menos el valor más bajo del potencial (en la placa negativa)

$$\Delta V = V(0) - V(d) = -\int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_d^0 \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} \cdot \hat{z} dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q\, d}{\epsilon_0\, A} \quad (2)$$

donde $Q = \sigma A$ es la carga encerrada en una superficie de área A.

Se define la **capacidad** C (no confundir con el Coulomb C) como el coeficiente de proporcionalidad entre la carga y la diferencia de potencial

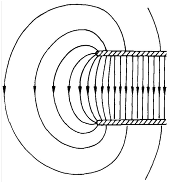
$$Q = C\, \Delta V \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (3)$$

En el sistema MKS las unidades de C son Coulomb/Volt, lo que se define como Faradio $\mathtt{F} = \mathtt{C}/\mathtt{V}$.

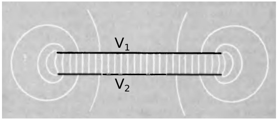
Entonces como $\Delta V = \dfrac{Q\,d}{\epsilon_0\,A}$ la capacidad de dos placas paralelas es

$$C = \frac{\epsilon_0\,A}{d} > 0 \qquad (4)$$

La aproximación de placa infinita es en realidad muy buena. Basta con que la distancia entre placas d sea mucho menor que cualquier otra escala característica del capacitor de modo tal de poder despreciar los efectos de borde



(A) Fuente: Feynman



(B) Fuente: Purcell

Capacitores

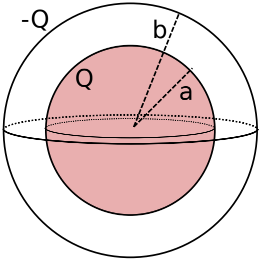
El Faradio resulta ser una cantidad gigantezca, a modo de comparación la capacidad de la Tierra es de 710 micro-Faradios ($\mu\mathtt{F} = 10^{-6}\mathtt{F}$). Habitualmente se usa como medida de capacidad el pico-Faradio ($\mathtt{pF} = 10^{-12}\mathtt{F}$).

Si tuviésemos dos placas paralelas separadas una distancia $d = 1mm$, entonces para tener una capacidad de $1\mathtt{pF}$ necesitaríamos placas de aproximandamente $113m^2$.

IMPORTANTE: La capacidad sólo depende de la geometría del conductor. Veremos más ejemplos a continuación.

Problema 7: capacitor esférico

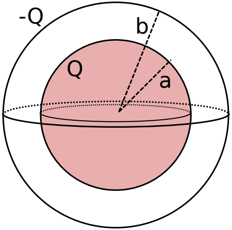
El Problema 7 de la guía 2 nos pide hallar la capacidad de distintos arreglos de conductores. La configuración del inciso b) son dos esferas conductoras



Para este problema nos interesa saber el campo eléctrico entre las esferas. Esto puede obtenerse utilizando la ley de Gauss o superposición.

Problema 7: capacitor esférico

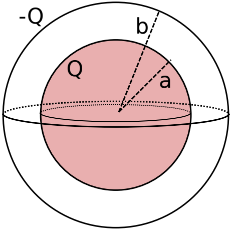
Recordemos el campo de una esfera de radio R cargada en superficie con carga Q :



$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} & r > R\,. \end{cases}$$

Problema 7: capacitor esférico

Recordemos el campo de una esfera de radio R cargada en superficie con carga Q :



$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} & r > R\,. \end{cases}$$

En este caso tenemos la superposición de dos esferas, una de radio a y otra de radio b.

$$\vec{E}_{\text{region intermedia}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}\hat{r}\,, \quad r \in [a, b] \qquad (5)$$

donde $Q = 4\pi a^2\,\sigma$ es la carga total de la esfera interior.

Problema 7: capacitor esférico

Calculemos la diferencia de potencial entre $r = a$ (conductor a potencial positivo) y $r = b$ (conductor a potencial negativo)

$$\Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\Big|_b^a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad (6)$$

con lo cual, recordando que la capacidad está dada por el cociente entre la carga y la diferencia de potencial $C = Q/\Delta V$

$$C_{\text{capacitor esférico}} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} > 0 \quad (7)$$

Notemos que C sólo depende de la geometría de los conductores.

Problema 7: capacitor esférico

Para calcular la **auto-capacidad** de una esfera conductora simplemente tenemos que tomar el límite $b \to \infty$ en la expresión anterior.

Esto es lo mismo que haber comenzado con la configuración de una esfera sola y calcular la diferencia de potencial entre ésta y el infinito, donde fijamos $V(r = \infty) = 0$

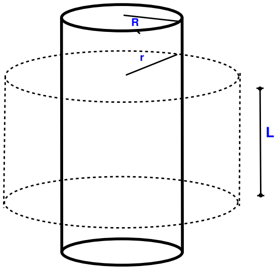
$$C_{\text{esfera}} = 4\pi\epsilon_0 a \qquad (8)$$

Nuevamente podemos notar que la capacidad depende únicamente de la geometría del/los conductor/es.

Campo eléctrico de un cilindro cargado en superficie con σ

Llamando s a la coordenada radial de cilíndricas
Para ambas superficies de Gauss
(cilindro interior y cilindro exterior) vale:

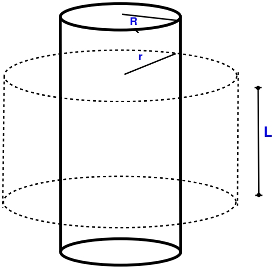
$$
\begin{aligned}
\int\int \vec{E}.\vec{ds} &= \int_0^L \int_0^{2\pi} E(s)\hat{s}.\hat{s} s d\theta dz \\
&= 2\pi L s E(s)
\end{aligned}
$$



Campo eléctrico de un cilindro cargado en superficie con σ

Llamando s a la coordenada radial de cilíndricas
Para ambas superficies de Gauss
(cilindro interior y cilindro exterior) vale:

$$\begin{aligned}\int\int \vec{E}.\vec{ds} &= \int_0^L \int_0^{2\pi} E(s)\hat{s}.\hat{s} s d\theta dz \\ &= 2\pi L s E(s)\end{aligned}$$



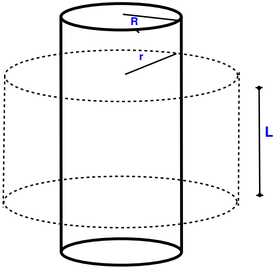
Veamos
ahora la Q_{enc}. Para $s < R$ $Q_{\text{enc}} = 0$
y por lo tanto $E(s) = 0$. Para $s > R$

$$Q_{\text{enc}} = \int_0^{\pi} \int_0^{L} \sigma R d\theta dz = 2\pi R L \sigma = Q$$

Campo eléctrico de un cilindro cargado en superficie con σ

Llamando s a la coordenada radial de cilíndricas
Para ambas superficies de Gauss
(cilindro interior y cilindro exterior) vale:

$$\begin{aligned} \int\int \vec{E}.\vec{ds} &= \int_0^L \int_0^{2\pi} E(s)\hat{s}.\hat{s} s d\theta dz \\ &= 2\pi L s E(s) \end{aligned}$$



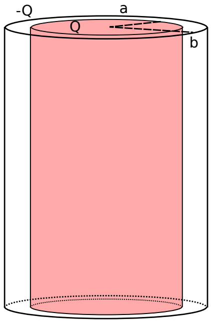
Veamos
ahora la Q_{enc}. Para $s < R$ $Q_{\mathrm{enc}} = 0$
y por lo tanto $E(s) = 0$. Para $s > R$

$$Q_{\mathrm{enc}} = \int_0^{\pi} \int_0^L \sigma R d\theta dz = 2\pi R L \sigma = Q$$

Y por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 s}\hat{s} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L s}\hat{s}$$

El inciso c) nos pide hallar la capacidad de un capacitor formado por dos cilindros infinitos concéntricos de radios a y b.



El campo eléctrico de esta configuración puede obtenerse por superposición o utilizando la ley de Gauss, aunque sólo nos interesa el campo en la región entre los conductores.

$$\vec{E}_{\text{region intermedia}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\, L\, s}\hat{s}\,, \quad s \in [a, b] \tag{9}$$

donde $Q = 2\pi a L\sigma$ es la carga encerrada en un largo L del cilindro interior

Capacitor cilíndrico

De nuevo, calculamos la diferencia de potencial entre el conductor con carga positiva (cilindro interior) y el conductor con carga negativa (cilindro exterior)

$$\Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \, L \, s} \hat{s} \cdot \hat{s} ds = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{10}$$

Con lo cual la capacidad resulta ser

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)} \tag{11}$$

y dividiendo por L obtenemos la capacidad por unidad de longitud

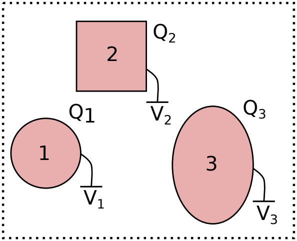
$$c = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} \tag{12}$$

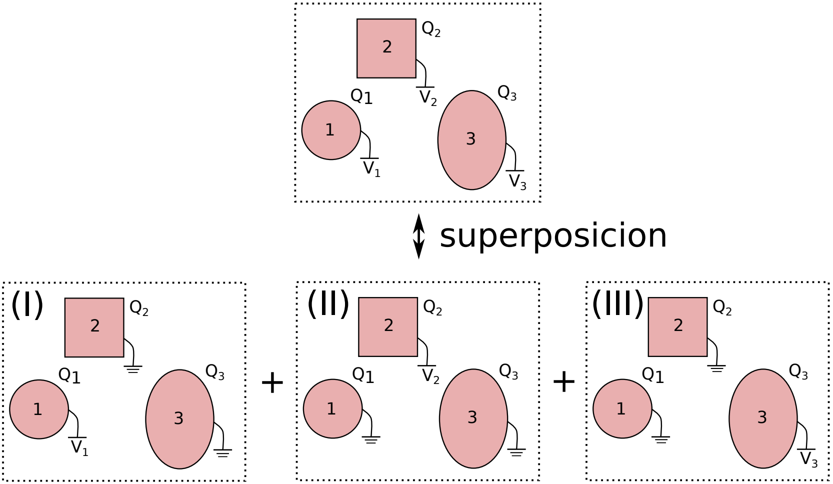
Matriz de capacidad

El caso de dos conductores es una configuración especial. Es posible considerar un arreglo de varios conductores cargados.

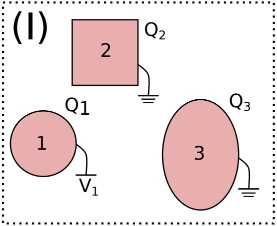
La llamada **matriz de capacidad o capacitancia** nos dice cómo se relacionan las cargas inducidas en un sistema de conductores con los potenciales a los que están sometidos cada uno de ellos.

Para verlo más claro vayamos a un ejemplo concreto

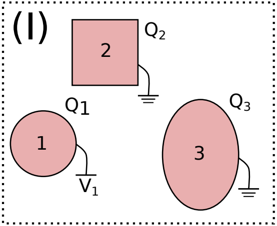



2
Q_2
Q_1
V_2
Q_3
1
3
V_1
V_3
superposicion
(I)
(II)
(III)
+
+

Configuración I: el conductor 1 al estar conectado a una batería que fija su voltaje al valor V_1 va adquirir una carga neta Q_1. Ésta carga va a inducir cargas Q_2 y Q_3 sobre los conductores 2 y 3 respectivamente y sólo puede depender de V_1.



Configuración I: el conductor 1 al estar conectado a una batería que fija su voltaje al valor V_1 va adquirir una carga neta Q_1. Ésta carga va a inducir cargas Q_2 y Q_3 sobre los conductores 2 y 3 respectivamente y sólo puede depender de V_1.



Entonces podemos escribir

$$Q_1 = C_{11} V_1 \,, \quad Q_2 = C_{21} V_1 \,, \quad Q_3 = C_{31} V_1 \tag{13}$$

donde C_{11} , C_{21} , C_{31} son constantes que sólo dependen de la geometría de los conductores.

Matriz de capacidad

Siguiendo un razonamiento análogo, podemos escribir la configuración II como

$$Q_1 = C_{12} V_2 \,, \quad Q_2 = C_{22} V_2 \,, \quad Q_3 = C_{32} V_2 \tag{14}$$

Matriz de capacidad

Siguiendo un razonamiento análogo, podemos escribir la configuración II como

$$Q_1 = C_{12} V_2 \,, \quad Q_2 = C_{22} V_2 \,, \quad Q_3 = C_{32} V_2 \tag{14}$$

y la configuración III como

$$Q_1 = C_{13} V_3 \,, \quad Q_2 = C_{23} V_3 \,, \quad Q_3 = C_{33} V_3 \tag{15}$$

Matriz de capacidad

Siguiendo un razonamiento análogo, podemos escribir la configuración II como

$$Q_1 = C_{12} V_2 \,, \quad Q_2 = C_{22} V_2 \,, \quad Q_3 = C_{32} V_2 \tag{14}$$

y la configuración III como

$$Q_1 = C_{13} V_3 \,, \quad Q_2 = C_{23} V_3 \,, \quad Q_3 = C_{33} V_3 \tag{15}$$

El caso más general con los tres conductores conectados a baterías con voltajes arbitrarios V_1 , V_2 y V_3 puede obtenerse com superposición de las configuraciones I, II y III, quedando un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11} V_1 + C_{12} V_2 + C_{13} V_3 \\ Q_2 &= C_{21} V_1 + C_{22} V_2 + C_{23} V_3 \\ Q_3 &= C_{31} V_1 + C_{32} V_2 + C_{33} V_3 \end{aligned} \tag{16}$$

Matriz de capacidad

Este sistema de ecuaciones puede escribirse de forma matricial definiendo vectores columna $\vec{Q}$ y $\vec{V}$ cuyas componentes son las cargas Q_i y los voltajes V_i

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

donde $[C]$ es la llamada matriz de capacidad. Se puede probar que la matriz es simétrica, $C_{ij} = C_{ji}$; y que los coeficientes diagonales $C_{ii} > 0$, mientras que los no-diagonales$C_{i\,j\neq i} < 0$. A los coeficientes C_{ii} se los denomina *de capacidad*, y a los coeficientes C_{ij} *de inducción*. Este análisis puede extenderse a un sistema de N conductores.