Clase 10: Principio de los trabajos virtuales

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

6 de octubre de 2020

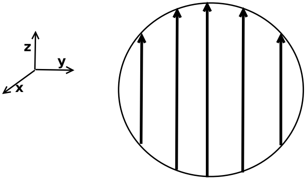
Comentario sobre $\vec{\nabla} \times \vec{D}$

El teorema del rotor en volumen, nos dice que vale la siguiente igualdad:

$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{A} = \int_S \vec{A} \times \hat{n}\, dS$$

Entonces, recordando que $\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{P}$, se infiere que $\vec{P} \times \hat{n}$ es fuente de $\vec{\nabla} \times \vec{D}$ en superficie

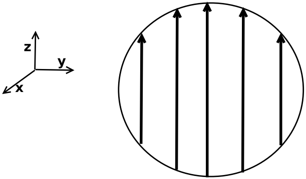
Comentario sobre el problema 21



Un electrete es un
material que tiene polarización permanente.
En este problema hay un electrete esférico polarizado uniformemente, es decir:

$$\vec{P} = P_0 \hat{z}$$

Comentario sobre el problema 21

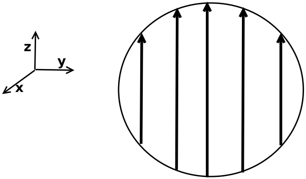


Un electrete es un material que tiene polarización permanente. En este problema hay un electrete esférico polarizado uniformemente, es decir:

$$\vec{P} = P_0 \hat{z}$$

- Recordemos que la normal superfice de la esfera es $\hat{r}$ y entonces $\vec{P} \times \hat{n} \neq 0$ y por lo tanto $\vec{\nabla} \times \vec{D} \neq 0$. En este problema NO podemos usar la ley de Gauss para $\vec{D}$ para obtener los campos $\vec{D}$ y $\vec{E}$.

Comentario sobre el problema 21



Un electrete es un
material que tiene polarización permanente.
En este problema hay un electrete esférico
polarizado uniformemente, es decir:

$$\vec{P} = P_0 \hat{z}$$

- Recordemos que la normal superfice de la esfera es $\hat{r}$ y entonces $\vec{P} \times \hat{n} \neq 0$ y por lo tanto $\vec{\nabla} \times \vec{D} \neq 0$. En este problema NO podemos usar la ley de Gauss para $\vec{D}$ para obtener los campos $\vec{D}$ y $\vec{E}$.
- Pero en este problema se puede calcular $\sigma_P = \vec{P}.\hat{n}$ y como no hay cargas libres la fuentes de $\vec{E}$ son solamente las cargas de polarización. Por lo tanto, este es un ejemplo de un problema donde conviene calcular $\vec{E}$ en vez de $\vec{D}$ en primer lugar.

Fuerza y Torque sobre un dipolo en un campo externo

Recordemos que el campo eléctrico de un dipolo ubicado en la posición $\vec{r}_{\rm dip}$ se puede escribir:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_{\rm dip})(\vec{r}-\vec{r}_{\rm dip})}{|\vec{r}-\vec{r}_{\rm dip}|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}_{\rm dip}|^3}\right]$$

La fuerza sobre un dipolo se puede expresar:

$$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$$

y el torque sobre un dipolo se puede expresar:

$$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$$

Principio de los trabajos virtuales

Recordemos que para un sistema de 2 conductores que están conectados a baterías V_1 y V_2, las cargas de los mismos Q_1 , Q_2 se pueden expresar:

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{11}V_1 + c_{12}V_2 \\ Q_2 &= c_{21}V_1 + c_{22}V_2 \end{aligned}$$

Principio de los trabajos virtuales

Recordemos que para un sistema de 2 conductores que están conectados a baterías V_1 y V_2, las cargas de los mismos Q_1 , Q_2 se pueden expresar:

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{11}V_1 + c_{12}V_2 \\ Q_2 &= c_{21}V_1 + c_{22}V_2 \end{aligned}$$

Consideremos ahora un conjunto de N conductores cargados con cargas $Q_i(i = 1, ..., N)$. Los potenciales correspondientes de los conductores son $V_i(i = 1, ..., N)$. Podemos generalizar la relación anterior entre cargas y potenciales de la siguiente manera:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}V_j \tag{1}$$

donde c_{ii} son los coeficientes de capacidad y c_{ij} son los coeficientes de inducción.

Principio de los trabajos virtuales

La energía electrostática del conjunto de conductores se puede expresar:

$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i \qquad (2)$$

Principio de los trabajos virtuales

La energía electrostática del conjunto de conductores se puede expresar:

$$
\begin{aligned}
U_e &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} V_i c_{ij} V_j
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Por el teorema de Earnshaw los conductores cargados no pueden estar en equilibrio estable si están sometidos unicamente a fuerzas eléctricas. Por lo tanto, los conductores están en equilibrio estable, debido a que actúan sobre ellos fuerzas mecánicas que contrarestan las fuerzas eléctricas.

Principio de los trabajos virtuales

Si se retira durante un intervalo de tiempo infinitesimal la ligadura mecánica que mantiene sujeto a uno de los conductores, dicho conductor experimentará un desplazamiento infinitesimal debido a la fuerza eléctrica que actúa sobre el y esa fuerza eléctrica realizará un trabajo mecánico dW. Al mismo tiempo, la energía electrostática almacenada en el conjunto de conductores experimentará una variación infinitesimal dU_e. A continuación vamos a obtener una relación entre dW y dU_e, para obtener una expresión de la fuerza eléctrica sobre el conductor en términos de U_e. Vamos distinguir dos casos:

Principio de los trabajos virtuales

Si se retira durante un intervalo de tiempo infinitesimal la ligadura mecánica que mantiene sujeto a uno de los conductores, dicho conductor experimentará un desplazamiento infinitesimal debido a la fuerza eléctrica que actúa sobre el y esa fuerza eléctrica realizará un trabajo mecánico dW. Al mismo tiempo, la energía electrostática almacenada en el conjunto de conductores experimentará una variación infinitesimal dU_e. A continuación vamos a obtener una relación entre dW y dU_e, para obtener una expresión de la fuerza eléctrica sobre el conductor en términos de U_e. Vamos distinguir dos casos:

1. las cargas de los conductores Q_i se mantienen constantes .

Principio de los trabajos virtuales

Si se retira durante un intervalo de tiempo infinitesimal la ligadura mecánica que mantiene sujeto a uno de los conductores, dicho conductor experimentará un desplazamiento infinitesimal debido a la fuerza eléctrica que actúa sobre el y esa fuerza eléctrica realizará un trabajo mecánico dW. Al mismo tiempo, la energía electrostática almacenada en el conjunto de conductores experimentará una variación infinitesimal dU_e. A continuación vamos a obtener una relación entre dW y dU_e, para obtener una expresión de la fuerza eléctrica sobre el conductor en términos de U_e. Vamos distinguir dos casos:

1. las cargas de los conductores Q_i se mantienen constantes .
2. los conductores están conectados a baterías y entonces los potenciales V_i se mantienen constantes.

Conductores con carga constante

Supongamos que mientras que se mantienen constantes las cargas de los N conductores, un conductor que está sometido a la fuerza eléctrica:

$$\vec{F}_e = F_{ex}\hat{x} + F_{ey}\hat{y} + F_{ez}\hat{z} \tag{3}$$

experimenta un desplazamiento virtual $\vec{dr}$.

Conductores con carga constante

Supongamos que mientras que se mantienen constantes las cargas de los N conductores, un conductor que está sometido a la fuerza eléctrica:

$$\vec{F}_e = F_{ex}\hat{x} + F_{ey}\hat{y} + F_{ez}\hat{z} \tag{3}$$

experimenta un desplazamiento virtual $\vec{dr}$. El trabajo infinitesimal dW realizado por la fuerza eléctrica:

$$dW = \vec{F}_e.\vec{dr} = F_{ex}dx + F_{ey}dy + F_{ez}dz \tag{4}$$

Conductores con carga constante

Supongamos que mientras que se mantienen constantes las cargas de los N conductores, un conductor que está sometido a la fuerza eléctrica:

$$\vec{F}_e = F_{ex}\hat{x} + F_{ey}\hat{y} + F_{ez}\hat{z} \tag{3}$$

experimenta un desplazamiento virtual $\vec{dr}$. El trabajo infinitesimal dW realizado por la fuerza eléctrica:

$$dW = \vec{F}_e.\vec{dr} = F_{ex}dx + F_{ey}dy + F_{ez}dz \tag{4}$$

Como los conductores están aislados, el trabajo mecánico de la ecuación anterior se ha realizado exclusivamente a expensas de la disminución de la energía electrostática. Por el principio de conservación de la energía se tiene que cumplir que:

$$dW = F_{ex}dx + F_{ey}dy + F_{ez}dz = -dU_e \tag{5}$$

Finalmente se puede expresar la fuerza electrostática:

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= -\frac{\partial U_e}{\partial x}\Big|_{Q_i=\text{cte}}\ \hat{x} - \frac{\partial U_e}{\partial y}\Big|_{Q_i=\text{cte}}\ \hat{y} - \frac{\partial U_e}{\partial z}\Big|_{Q_i=\text{cte}}\ \hat{z} \\ &= -\vec{\nabla} U\Big|_{Q_i=\text{cte}} \end{aligned} \tag{6}$$

Conductores con potencial constante

Supongamos ahora que los conductores están conectados a baterías que los mantienen a un potencial constante V_i y supongamos ahora que un conductor que está sometido a la fuerza

$$\vec{F}_e = F_{ex}\hat{x} + F_{ey}\hat{y} + F_{ez}\hat{z} \tag{7}$$

experimenta un desplazamiento virtual $\vec{dr} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$.

Conductores con potencial constante

Supongamos ahora que los conductores están conectados a baterías que los mantienen a un potencial constante V_i y supongamos ahora que un conductor que está sometido a la fuerza

$$\vec{F}_e = F_{ex}\hat{x} + F_{ey}\hat{y} + F_{ez}\hat{z} \tag{7}$$

experimenta un desplazamiento virtual $\vec{dr} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$. En este caso nuevamente el trabajo mecánico infinitesimal se puede expresar:

$$dW = F_{ex}dx + F_{ey}dy + F_{ez}dz \tag{8}$$

Conductores con potencial constante

Supongamos ahora que los conductores están conectados a baterías que los mantienen a un potencial constante V_i y supongamos ahora que un conductor que está sometido a la fuerza

$$\vec{F}_e = F_{ex}\hat{x} + F_{ey}\hat{y} + F_{ez}\hat{z} \tag{7}$$

experimenta un desplazamiento virtual $\vec{dr} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$. En este caso nuevamente el trabajo mecánico infinitesimal se puede expresar:

$$dW = F_{ex}dx + F_{ey}dy + F_{ez}dz \tag{8}$$

Sin embargo, la situación es distinta de la descripta anteriormente (conductores con carga constante), porque en este caso las cargas de los conductores varían, con lo cual las baterías tiene que consumir energía. Si la carga del conductor i-ésimo pasa de valer Q_i a valer $Q_i + dQ_i$, la batería tiene que trasladar la carga infinitesimal dQ_i desde potencial $V = 0$ a potencial V_i.

Conductores con potencial constante

El trabajo realizado por la batería para trasladar esa carga infinitesimal es:

$$dW_{bi} = dQ_i(V_i - 0) = V_i dQ_i \tag{9}$$

Conductores con potencial constante

El trabajo realizado por la batería para trasladar esa carga infinitesimal es:

$$dW_{bi} = dQ_i(V_i - 0) = V_i dQ_i \tag{9}$$

En consecuencia, el trabajo realizado por las N baterías está dado por:

$$dW_b = \sum_{i=1}^{N} dW_{bi} = \sum_{i=1}^{N} V_i dQ_i \tag{10}$$

Conductores con potencial constante

El trabajo realizado por la batería para trasladar esa carga infinitesimal es:

$$dW_{bi} = dQ_i(V_i - 0) = V_i dQ_i \tag{9}$$

En consecuencia, el trabajo realizado por las N baterías está dado por:

$$dW_b = \sum_{i=1}^{N} dW_{bi} = \sum_{i=1}^{N} V_i dQ_i \tag{10}$$

Por otro lado, como durante el desplazamiento virtual cambian los coeficientes de capacidad c_{ii} e inducción c_{ij}, la energía electrostática también se modificará:

$$dU_e = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U_e}{\partial Q_i}|_{V_i=\text{cte}}\, dQ_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial Q_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} Q_j V_j\right)|_{V_i=\text{cte}}\, dQ_i \tag{11}$$

Entonces la energía electrostática se puede expresar:

$$dU_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} V_i\, dQ_i \tag{12}$$

Entonces la energía electrostática se puede expresar:

$$dU_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} V_i\, dQ_i \tag{12}$$

Y recordando que:

$$dW_b = \sum_{i=1}^{N} V_i dQ_i \tag{13}$$

la energía electrostática se puede expresar:

$$dU_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} V_i\, dQ_i = \frac{1}{2} dW_b \tag{14}$$

La ecuación anterior nos dice que la energía electrostática aumenta durante el desplazamiento virtual una cantidad infinitesimal igual a la mitad de la energía consumida por las baterías.

Conductores con potencial constante

Por lo tanto , la otra mitad de la energía consumida se invierte en el trabajo mecánico dW realizado en el desplazamiento virtual. Como consecuencia de la conservación de la energía se puede afirmar que:

$$dW_b = dU_e + dW \tag{15}$$

Conductores con potencial constante

Por lo tanto , la otra mitad de la energía consumida se invierte en el trabajo mecánico dW realizado en el desplazamiento virtual. Como consecuencia de la conservación de la energía se puede afirmar que:

$$dW_b = dU_e + dW \tag{15}$$

Entonces reemplazando la ecuación 14 ($dU_e = \frac{1}{2} dW_b$) en la ecuación 15 obtenemos:

$$2dU_e = dU_e + dW \tag{16}$$

Conductores con potencial constante

Por lo tanto , la otra mitad de la energía consumida se invierte en el trabajo mecánico dW realizado en el desplazamiento virtual. Como consecuencia de la conservación de la energía se puede afirmar que:

$$dW_b = dU_e + dW \tag{15}$$

Entonces reemplazando la ecuación 14 ($dU_e = \frac{1}{2} dW_b$) en la ecuación 15 obtenemos:

$$2dU_e = dU_e + dW \tag{16}$$

y por lo tanto obtenemos:

$$dU_e = dW \tag{17}$$

Por lo tanto , la otra mitad de la energía consumida se invierte en el trabajo mecánico dW realizado en el desplazamiento virtual. Como consecuencia de la conservación de la energía se puede afirmar que:

$$dW_b = dU_e + dW \tag{15}$$

Entonces reemplazando la ecuación 14 ($dU_e = \frac{1}{2} dW_b$) en la ecuación 15 obtenemos:

$$2dU_e = dU_e + dW \tag{16}$$

y por lo tanto obtenemos:

$$dU_e = dW \tag{17}$$

y reemplazando dW por su expresión :

$$dU_e = F_{ex}dx + F_{ey}dy + F_{ez}dz \tag{18}$$

Finalmente obtenemos la expresión para la fuerza:

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= \frac{\partial U_e}{\partial x}\Big|_{V_i=\text{cte}}\ \hat{x} + \frac{\partial U_e}{\partial y}\Big|_{V_i=\text{cte}}\ \hat{y} + \frac{\partial U_e}{\partial z}\Big|_{V_i=\text{cte}}\ \hat{z} \\ &= \vec{\nabla} U\big|_{V_i=\text{cte}} \qquad (19)\end{aligned}$$

Problema 15

En este problema se pide que usando el principio de los trabajos virtuales, obtener la fuerza entre las placas de un capacitor: i) aislado y ii) conectado a una batería. Comencemos por el capacitor aislado.

Problema 15

En este problema se pide que usando el principio de los trabajos virtuales, obtener la fuerza entre las placas de un capacitor: i) aislado y ii) conectado a una batería. Comencemos por el capacitor aislado.
Recordemos el campo eléctrico para un capacitor cargado con carga Q y separación entre las placas d:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z} & 0 < z < d \\ 0 & z < 0 \; o \; z > d \end{cases}$$

Problema 15

En este problema se pide que usando el principio de los trabajos virtuales, obtener la fuerza entre las placas de un capacitor: i) aislado y ii) conectado a una batería. Comencemos por el capacitor aislado.
Recordemos el campo eléctrico para un capacitor cargado con carga Q y separación entre las placas d:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z} & 0 < z < d \\ 0 & z < 0 \ o \ z > d \end{cases}$$

y recordemos la diferencia de potencial ΔV entre las placas del capacitor:

$$\Delta V = -\int \vec{E}.\vec{dl} = -\int_0^d (-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}).\hat{z}dz = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

Problema 15

En este problema se pide que usando el principio de los trabajos virtuales, obtener la fuerza entre las placas de un capacitor: i) aislado y ii) conectado a una batería. Comencemos por el capacitor aislado.
Recordemos el campo eléctrico para un capacitor cargado con carga Q y separación entre las placas d:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z} & 0 < z < d \\ 0 & z < 0 \ o \ z > d \end{cases}$$

y recordemos la diferencia de potencial ΔV entre las placas del capacitor:

$$\Delta V = -\int \vec{E}.\vec{dl} = -\int_0^d (-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}).\hat{z}dz = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

De esta manera obtenemos la capacidad:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q\epsilon_0}{\sigma d} = \frac{\sigma A\epsilon_0}{\sigma d} = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

Problema 15

Ahora podemos calcular la energía electrostática:

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{A\epsilon_0}$$

Problema 15

Ahora podemos calcular la energía electrostática:

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{A\epsilon_0}$$

Ahora vamos a calcular la fuerza sobre las placas del capacitor usando el principio de los trabajos virtuales. En este caso, recordemos que el capacitor esta aislado:

$$F_e = -\frac{\partial U_e}{\partial (d)}|_{Q=\mathrm{cte}} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{A\epsilon_0}$$

Problema 15

Veamos ahora el caso del capacitor conectado a la batería. La expresión para el campo eléctrico, la capacidad y la diferencia de tensión son iguales. La diferencia que ahora en vez de ser $Q = \mathrm{cte}$ es $\Delta V = \mathrm{cte}$. Comencemos calculando la energía:

$$U_e = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{A\epsilon_0}{d} \Delta V^2$$

Problema 15

Veamos ahora el caso del capacitor conectado a la batería. La expresión para el campo eléctrico, la capacidad y la diferencia de tensión son iguales. La diferencia que ahora en vez de ser $Q = \text{cte}$ es $\Delta V = \text{cte}$. Comencemos calculando la energía:

$$U_e = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{A\epsilon_0}{d} \Delta V^2$$

Calculamos ahora la fuerza usando el principio de los trabajos virtuales:

$$F_e = \frac{\partial U_e}{\partial (d)}|_{\Delta V = \text{cte}} = -\frac{1}{2} \frac{A\epsilon_0}{d^2} \Delta V^2$$

Problema 15

Veamos ahora el caso del capacitor conectado a la batería. La expresión para el campo eléctrico, la capacidad y la diferencia de tensión son iguales. La diferencia que ahora en vez de ser $Q = \text{cte}$ es $\Delta V = \text{cte}$. Comencemos calculando la energía:

$$U_e = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{A\epsilon_0}{d} \Delta V^2$$

Calculamos ahora la fuerza usando el principio de los trabajos virtuales:

$$F_e = \frac{\partial U_e}{\partial (d)} |_{\Delta V = \text{cte}} = -\frac{1}{2} \frac{A\epsilon_0}{d^2} \Delta V^2$$

Veamos ahora como esta última expresión es igual a la calculada anteriormente para el caso del capacitor aislado. Recordemos que $Q = C\Delta V$. Entonces:

$$F_e = -\frac{1}{2} \frac{C}{d} \Delta V^2 = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{Cd} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{A\epsilon_0 d} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{A\epsilon_0}$$