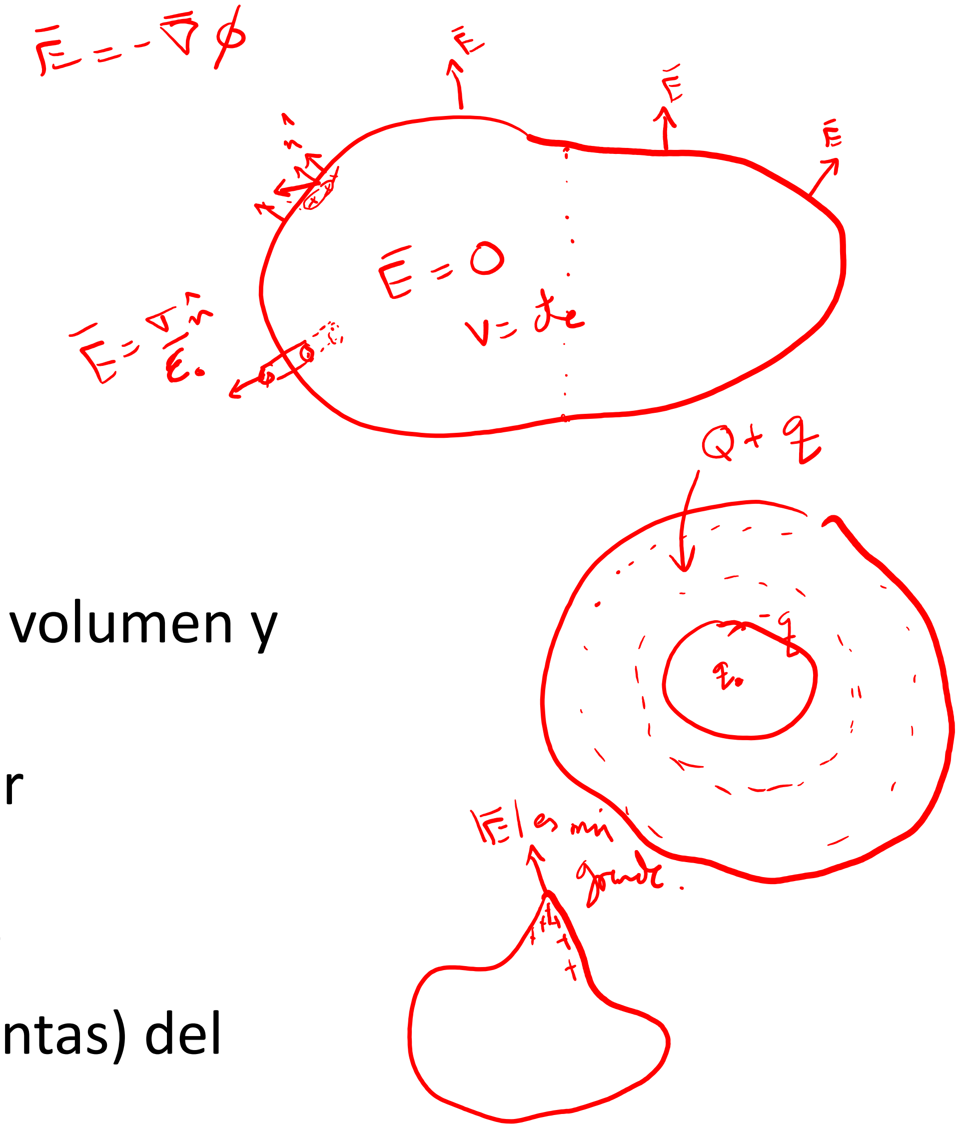
Clase 7: capacidad y condensadores

Repaso de conductores:



Hipótesis:

sus cargas pueden moverse libremente

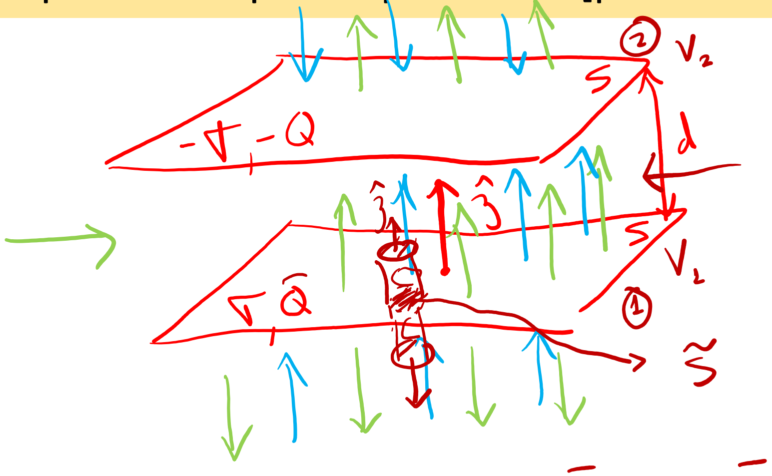
Propiedades:

- $\overline{E}$ = 0 en el interior del conductor (V = cte en el volumen y en la superficie)
- $\overline{E}$ es perpendicular a la superficie del conductor
- $\overline{E} = \sigma\,/\epsilon_0\ \ \hat{n}$ cerca de la superficie
- Toda la carga neta está en la superficie exterior
- $|\overline{E}|$ es mayor en regiones “más angostas” (o puntas) del conductor

Capacitores (condensadores)

Un capacitor es un sistema de 2 conductores que pueden almacenar energía eléctrica en un campo eléctrico.

Capacitor de placas paralelas: [problema 7 (d)]



$\sigma = \dfrac{Q}{S} \Rightarrow \dfrac{Q}{\sigma} = S$

Depende del material y la geometría

$$\underbrace{C}_{>0} = \frac{Q}{V_1 - V_2} \overset{(*)}{=} \frac{Q\,\varepsilon_0}{\sigma \cdot d} = \boxed{\frac{S \cdot \varepsilon_0}{d} = C} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

$$\Rightarrow \int_0^d E\, dz = -\int_{V(0)=V_1}^{V(d)=V_2} dV \quad (*)$$

Superposición: $\rightarrow \underbrace{E_{Tot}} = \underbrace{E_{\sigma}} + \underbrace{E_{-\sigma}} = 2E_{\sigma} \Rightarrow$ Gauss: $\oint\!\!\oint E \cdot dS = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_{sup.\,sup} \overbrace{E \cdot dS}^{E(z)\hat{z}\cdot dS\hat{z}} + \iint_{sup.\,inf} \overbrace{E \cdot dS}^{E(z)\hat{z}\cdot dS\hat{z}} = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2E(z) \cdot \overbrace{\iint dS}^{S} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}}$$

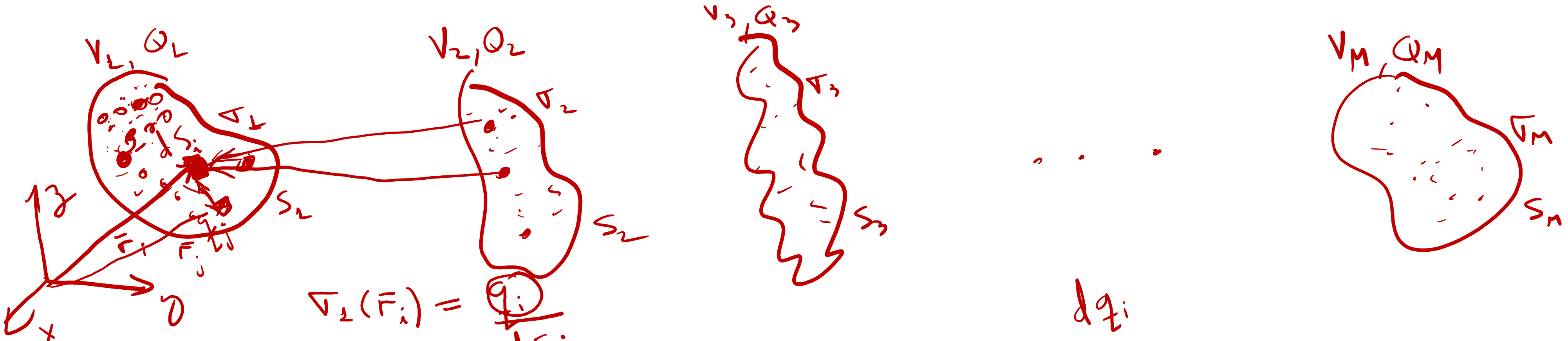
$$\Rightarrow \boxed{E_{Tot} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z}} \qquad (*)\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = -V_2 + V_1 \Rightarrow \boxed{V_1 - V_2 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}} \ (*)$$

Sistema de M conductores: relación entre cargas y potenciales

$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$

Condición electrostática (ya se acomodaron todas las cargas)

Los conductores están caracterizados por sus potenciales V_l sus cargas totales Q_l, sus σ_l y sus superficies S_l.



$\sigma_1(\bar{r}_i) = \frac{q_i}{dS_i}$

Ahora dividimos las superficies en N elementos dS_i. Cada pedacito tiene $q_i = \sigma_l(\overline{r_i})\, dS_i$.

$N \gg M$

$\det \neq 0$

$$V(\overline{r_i}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{k\, q_j}{|\overline{r_i} - \overline{r_j}|} \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} p_{ij}\, q_j \qquad (i = 1, \dots, N) \qquad con \quad p_{ij} \equiv \frac{k}{|\overline{r_i} - \overline{r_j}|} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} V(\bar{r}_1) \\ \vdots \\ V(\bar{r}_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & p_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{q}_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} b_{kj}\, V(\overline{r_j}) \qquad (k = 1, \dots, N)$$

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & & b_{1N} \\ & & \\ b_{N1} & & b_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(\bar{r}_1) \\ \\ V(\bar{r}_N) \end{pmatrix}$$

Sistema de M conductores: relación entre cargas y potenciales

Quiero calcular ahora la carga total sobre el conductor l-ésimo: Q_l

$$Q_l = \sum_{dS_k \in S_l} q_k = \sum_k \sum_j b_{kj}\, V(\overline{r_j}) = b_{12} V(\bar r_2) + b_{13} V(\bar r_3) + b_{14} V(\bar r_4) + \dots + b_{1N} V(\bar r_N) +$$

$$+ b_{21} V(\bar r_1) + b_{23} V(\bar r_3) + \dots + b_{2N} V(\bar r_N).$$

$dS_k \in S_l$

$Q_1 =$

$$= \underbrace{(b_{12} + b_{13} + b_{\dots})}_{C_{l1}} V_1 + \overbrace{(b \dots)}^{C_{l2}} V_2 + \dots + \underbrace{(b \dots)}_{C_{lm}} V_M$$

$$\boxed{Q_l = \sum_{m=1}^{M} C_{lm} V_m} \qquad con \qquad l = 1, \dots, M.$$

Sistema de M conductores: relación entre cargas y potenciales

$$\boxed{Q_l = \sum_{m=1}^{M} C_{lm} V_m} \qquad con \qquad l = 1, \dots, M.$$

Matriz capacidad

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1M} \\ & C_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ C_{M1} & & C_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_M \end{pmatrix}, \qquad \boxed{\bar{Q} = \bar{\bar{C}}\,\bar{V}}$$

$$\bar{V} = \underbrace{\bar{\bar{C}}^{-1}}_{\bar{\bar{A}}}\,\bar{Q}$$

Los C_{lm} son los coeficientes de la matriz capacidad y dependen solamente de la geometría de la configuración. A los C_{ll} se los llama coeficientes de <u>*capacidad*</u> y a los C_{lm} coeficientes de <u>*inducción.*</u> Los $C_{ll} > 0$ mientras que los $C_{lm} < 0$. Además $C_{lm} = C_{ml}$.

Problema 7 (a): M = 1

$$\boxed{Q_\ell = \sum_{m=1}^{M} C_{\ell m} V_m} \qquad (\ell = 1, \dots, M)$$

$$Q_1 = C_{11} V_1 \Rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{V}} \qquad 1F = \frac{C}{V}$$

Unidades

$$\boxed{F = \frac{C}{V}}$$

Gauss: $\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\bar{E}(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}\hat{r} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}}$$

$$V = [E]\,m \qquad \boxed{V = \frac{N}{C} m}$$

$V(\infty) \equiv 0$

$$\int_R^\infty E\,dr = -\int_{V(R)}^{V(\infty)} dV \Rightarrow kQ\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = V(R) \Rightarrow \frac{kQ}{R} = V(R) \Rightarrow \frac{Q}{V(R)} = \frac{R}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C = R\,4\pi\varepsilon_0}$$

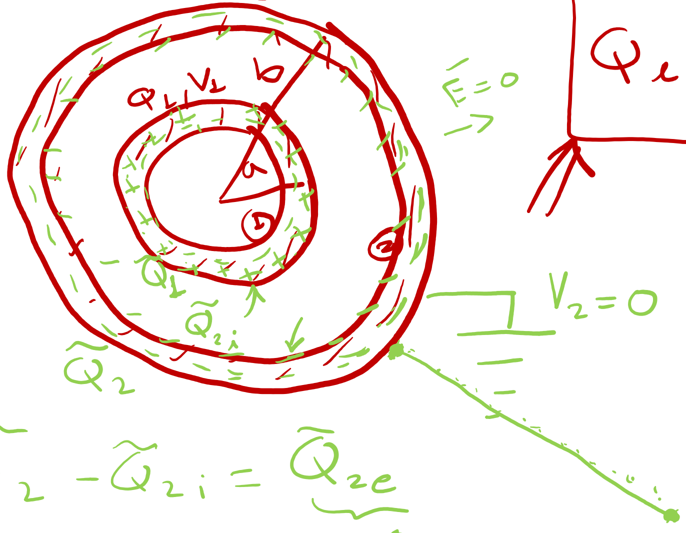
- $C = 1pF = 10^{-12} F \Rightarrow \frac{\cancel{10^{-12}}\,F}{4\pi \cdot 8{,}85 \times \cancel{10^{-12}}\ \frac{C^2}{Nm^2}} = R$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}85} \cdot \frac{\cancel{C}\,Nm^2}{V \cdot C^{\cancel{2}}} = 9 \times 10^{-3}\ \frac{\cancel{N}m^2}{\frac{\cancel{Nm}}{\cancel{C}} \cdot \cancel{C}} \Rightarrow \boxed{R = 9\,mm}$$

Problemas 7 (b): M = 2 ⟶ Capacitor!

$C_{12} = C_{21}$

Para estas configuraciones vale que $C_{11} = -C_{12}$. Esto es lo que define al capacitor.



$$\boxed{Q_\ell = \sum_{m=1}^{M} C_{\ell m} V_m} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \underbrace{C_{11}}V_1 + \underbrace{C_{12}}V_2 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

$\ell = 1, \dots, M$

$V_2 = 0$

$$\begin{cases} \tilde{Q}_1 = C_{11} V_1 \\ \tilde{Q}_2 = C_{21} V_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\tilde{Q}_{2i} = -\tilde{Q}_1}$$

$$\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_{2i} = 0$$

$$C_{11} V_1 + C_{21} V_1 = 0$$

$$\underbrace{(C_{11} + C_{21})}_{=0} V_1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_{11} = -C_{12}}$$

$$\tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_{2i} = \underbrace{\tilde{Q}_{2e}}_{=0}$$

$$\tilde{Q}_2 = \tilde{Q}_{2i}$$

$$Q \equiv Q_1 = \overbrace{C_{11}}^{\equiv C}(V_1 - V_2)$$

$$Q = C(V_1 - V_2) \Rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{V_1 - V_2}}$$

Capacidad de un capacitor.

Se puede hacer hasta el problema 11

Problemas 7 (b): M = 2

$$C = \frac{Q^{=Q_1}}{V_1 - V_2}$$

$$\int_a^b E \cdot dr = -\int_{V(a)=V_1}^{V(b)=V_2} dV \Rightarrow kQ\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = -V_2 + V_1$$

$$E(r) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

$$kQ\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_1 - V_2$$

$$kQ\,\frac{b-a}{ab} = V_1 - V_2 \Rightarrow \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{ab}{k(b-a)}$$

$$\boxed{C = \frac{ab}{k(b-a)}}$$

$$b\left(1 - \frac{a}{b}\right) \to 1$$

$$\text{si } b \to \infty \Rightarrow \boxed{C = \frac{a}{k} = 4\pi\varepsilon_0 a}$$