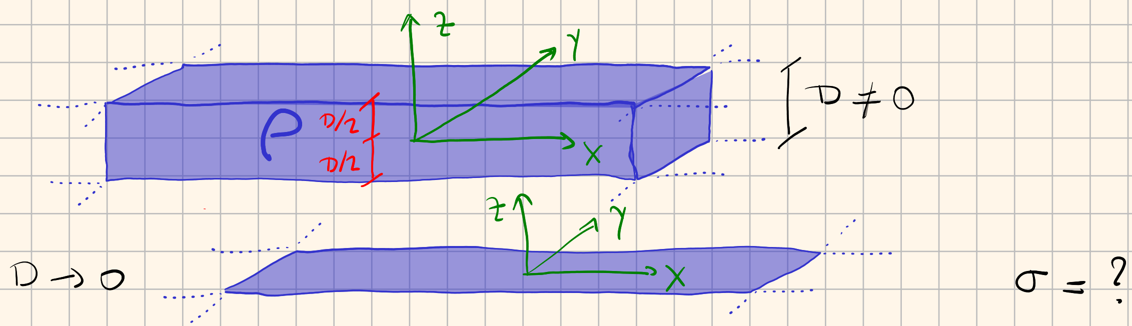
05/04/21

Guía 1: Problema 10

Una configuración superficial de carga σ puede considerarse como un caso límite de una carga distribuida dentro de un volumen tal que una de sus dimensiones puede considerarse despreciable.

a) Considere una lámina plana infinita de espesor D, cargada uniformemente con densidad ρ. Calcule y grafique el campo eléctrico y el potencial eléctrico.

b) Suponga que se comprime la lámina de tal forma que D → 0. Como la carga total no varía (es constante), la densidad ρ aumentará debido a la compresión. Escribir ρ como función de D. Cómo definiría la densidad superficial de carga σ? Encuentre y grafique el campo eléctrico y el potencial eléctrico cuando D → 0.



La configuración con carga en volumen ρ posee mucha simetría dado que el "ladrillo" es infinito: simetría de traslación en el plano xy y simetría de reflexión respecto del "medio" del ladrillo, muy similar al caso del plano infinito con carga superficial. Es claro que en este problema es conveniente usar Gauss para obtener el campo eléctrico. Un detalle a tener en cuenta es que habrá que considerar una zona interna (dentro del ladrillo) y otra zona externa (fuera del ladrillo).

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad\Rightarrow\quad \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dVol = \oint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot \overbrace{d\vec{S}}^{\hat{n}\,dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dVol$$

Es claro que la carga encerrada es proporcional a la altura de la "pastilla de Gauss" y en consecuencia el campo eléctrico también. Dependerá también del área de la superficie de Gauss?

$$\vec{E} \propto \begin{cases} \rho \ldots & |z| < D/2 \\ \rho D \ldots & |z| > D/2 \end{cases}$$

(queda para uds hacer la cuenta y averiguar qué son esos puntos suspensivos y si dependen o no de (x,y,z))

área

$$Q_{enc}(\text{▭}) = \rho D A$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{Q_{enc}}{D A}}$$

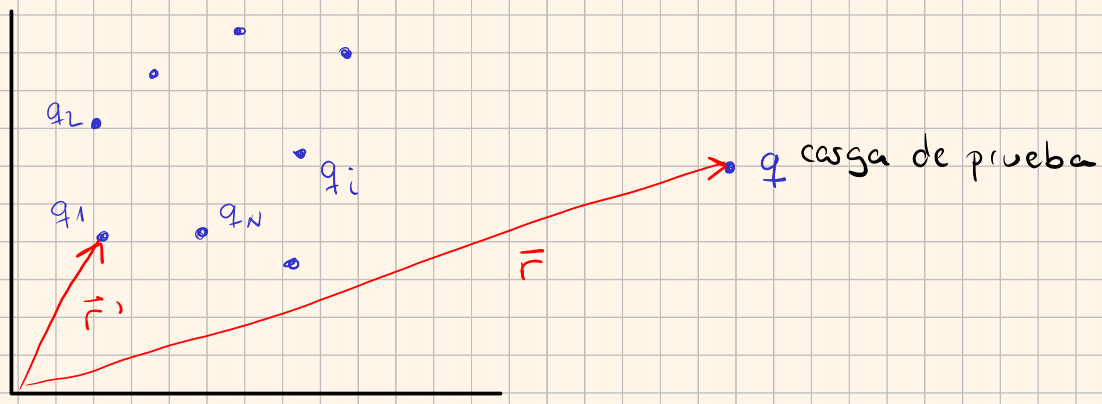
si $D \to 0 \Rightarrow \rho \to \infty$ pero $\rho D = \text{const} \Rightarrow Q = \text{const}$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma \equiv \rho D = Q/A}$$

chequeen unidades!

05/04/21 Guía 1: Principio de Superposición

distribución de N cargas
(fuentes)



El principio de superposición establece que la interacción entre dos cargas no se ve afectada por la presencia de otras cargas. Esto significa que la fuerza eléctrica sobre una carga de prueba es la suma de las fuerzas individuales que ejercen cada una de las cargas fuente sobre ella

$$\boxed{\vec{F}_q = \vec{F}_{q,1} + \vec{F}_{q,2} + \dots + \vec{F}_{q,N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{q,i}}$$

Si dividimos por q obtenemos una relación similar para el campo eléctrico

$$\boxed{\vec{E}_q = \vec{E}_{q,1} + \vec{E}_{q,2} + \dots + \vec{E}_{q,N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_{q,i}}$$

Y si integramos desde un punto de referencia r0 también obtenemos una relación similar para el potencial eléctrico

$$\boxed{V_q = V_{q,1} + V_{q,2} + \dots + V_{q,N} = \sum_{i=1}^{N} V_{q,i}}$$

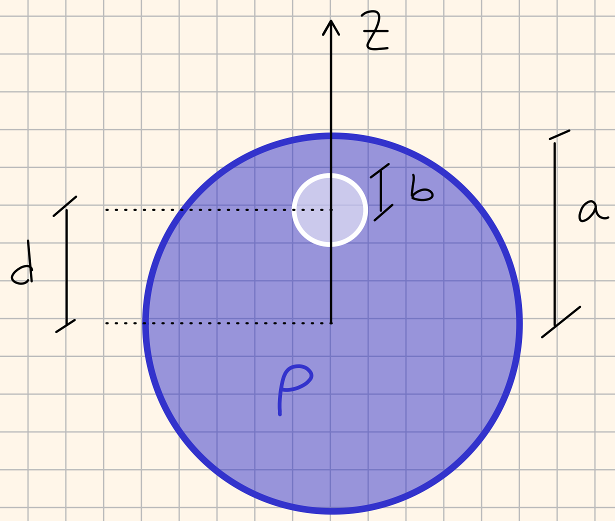
El principio se superposición se manifiesta en las ecuaciones de campo en que las mismas son ecuaciones diferenciales lineales

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \,, \qquad \nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$$

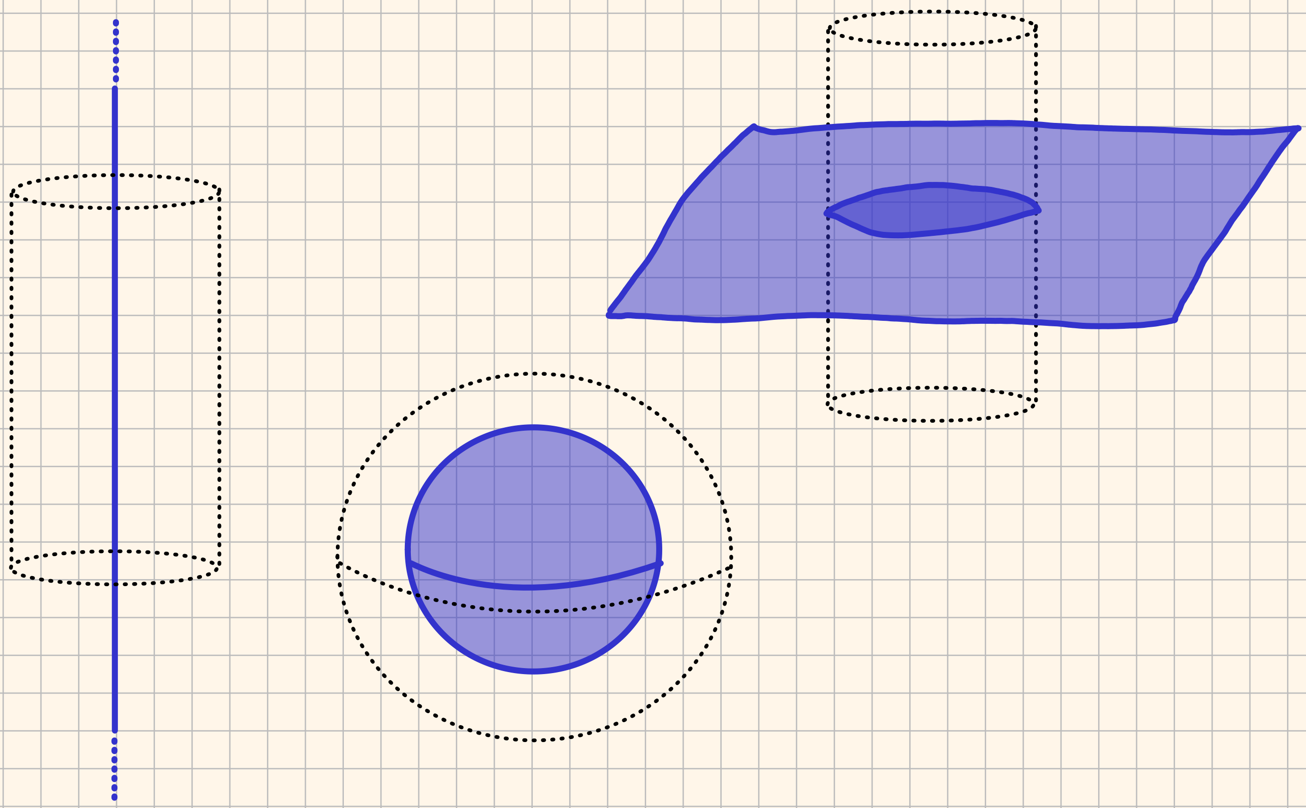
Si $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son soluciones $\Rightarrow$ $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ tmb
(si $\rho = \rho_1 + \rho_2$)

Problema 13

Una esfera de radio a cargada uniformemente con densidad ρ posee un hueco esférico de radio b<a en su interior. El centro del hueco está a una distancia d<(a-b) del centro de la esfera (es decir, el hueco de radio b NO es concéntrico con la esfera de radio a). Obtenga el valor del campo eléctrico sobre el eje de simetría de la configuración. Verifique que en el centro del agujero el valor del campo es el mismo que habría si no se hubiera practicado el agujero.

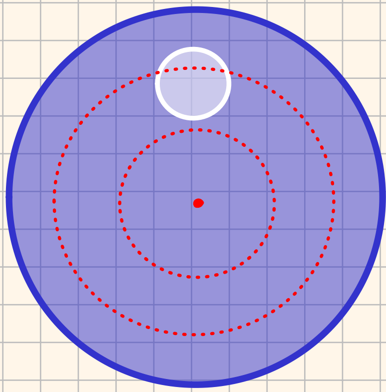


La ley de Gauss es extremadamente útil para obtener el campo eléctrico de configuraciones de alta simetría:



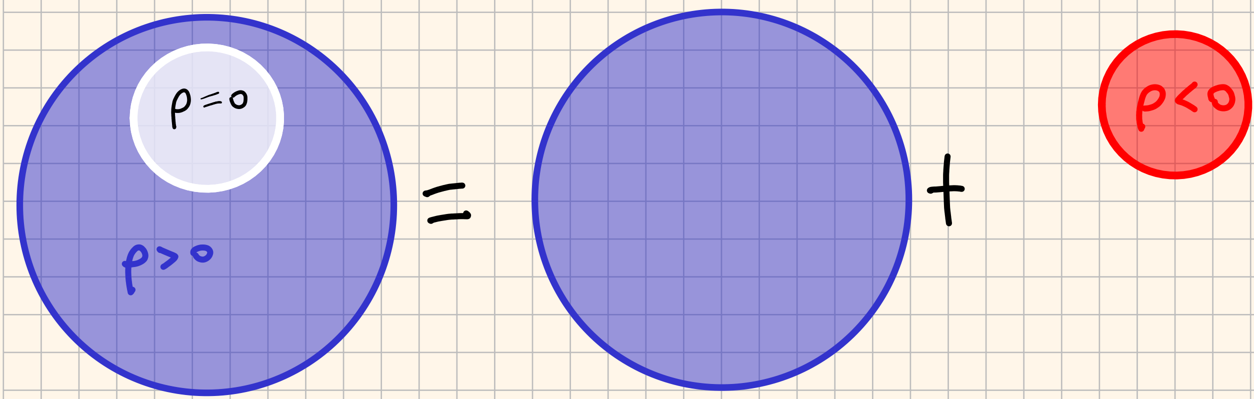
Notemos que la configuración del Problema 13 no presenta la simetría suficiente como para poder determinar la dirección del campo y su dependencia de las coordenadas en las superficies de Gauss.

Podemos intuir la dirección y la dependencia del campo eléctrico sobre las superficies rojas?



Para resolver este problema vamos a recurrir al principio de superposición.

Si no sabemos cómo obtener (facilmente) el campo de una configuración pero sí sabemos cómo descomponerlo como superposición de configuraciones más sencillas entonces LISTO!



$$\vec{E}_{\substack{\text{esfera}\\ \text{c/hueco}}} = \vec{E}^{(1)}_{\substack{\text{esfera}\\ \rho>0}} + \vec{E}^{(2)}_{\substack{\text{esfera}\\ \rho<0}}$$

Recordemos que en el Problema 8d obtuvimos el campo eléctrico de una esfera de radio R con densidad uniforme ρ

$$\vec{E}_{esf}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\, r\,\hat{r} & r \leqslant R \\[2ex] \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\, \dfrac{R^3}{r^2}\,\hat{r} & r > R \end{cases}$$

- $\vec{E}^{(1)}$ simplemente reemplazamos R → a en la expresión anterior
- $\vec{E}^{(2)}$ además de reemplazar R → b debemos desplazar el campo una distancia "d" respecto del origen de coordenadas en la dirección z

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\underbrace{\vec{r}}_{\text{punto campo}} = z\hat{z}) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} z\,\hat{z} & z \leq b \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{b^3}{|z|^2} \operatorname{sgn}(z)\,\hat{z} & z > b \end{cases}$$

Para obtener el campo eléctrico sobre el eje de simetría desplazado una distancia "d" a lo largo del mismo eje, hacemos el reemplazo z → z - d *(también debemos cambiar el signo de la densidad de carga ρ → -ρ)

$$\vec{E}^{(2)}_{\substack{\text{sobre el}\\ \text{eje } z}} = \begin{cases} -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(z-d)\,\hat{z} & |z-d| \leq b \\ -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{b^3}{|z-d|^2}\operatorname{sgn}(z-d)\,\hat{z} & |z-d| > b \end{cases}$$

Notemos que al sumar todas las contribuciones al campo eléctrico de la esfera con el hueco hay tres zonas distintas:
1) dentro de la esfera de radio b y dentro de la esfera de radio a;
2) fuera de la esfera de radio b y dentro de la esfera de radio a;
3) fuera de ambas

El campo eléctrico total queda

$$E_{s/el\ eje\ \hat{z}} = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a^3}{|z|^2}\operatorname{sgn}(z) - \frac{b^3}{|z-d|^2}\operatorname{sgn}(z-d)\right)\hat{z} & \text{p/ } |z|>a,\ |z-d|>b \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(z - \frac{b^3}{|z-d|^2}\operatorname{sgn}(z-d)\right)\hat{z} & \text{p/ } |z|\leq a,\ |z-d|>b \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\underbrace{\left(z-(z-d)\right)}_{=d}\hat{z} & \text{p/ } |z|\leq a,\ |z-d|\leq b \end{cases}$$

* Obs: en este caso es sencillo porque el punto campo y el punto fuente están sobre el eje z, si quisieramos considerar un caso más general hay que tener cuidado con la dirección del campo.

$$E \propto \begin{cases} \xi\,\hat{\xi} = \vec{\xi} & |\vec{\xi}| \leq R \\ \frac{1}{|\vec{\xi}|^2}\hat{\xi} = \frac{1}{|\vec{\xi}|^3}\vec{\xi} & \text{p/ } |\vec{\xi}| > R \end{cases} \qquad \text{con } \vec{\xi} = r\hat{r} - d\hat{z}$$