19/04/21

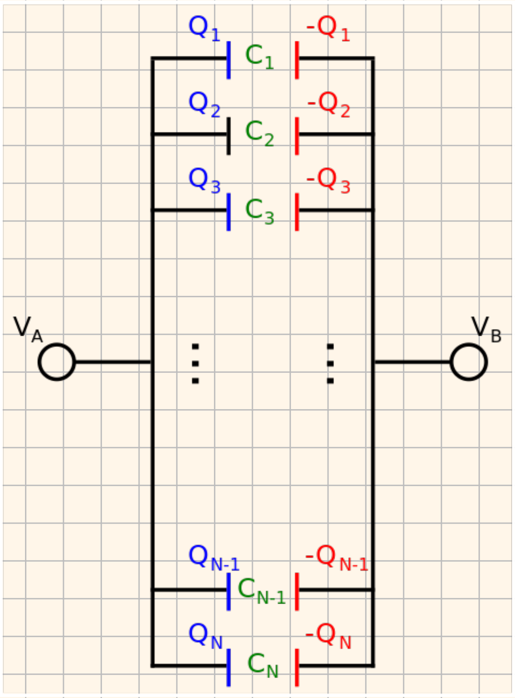
Clase 8: Capacitores II + Fuerza y Torque sobre un Dipolo

Wikipedia: un capacitor es un dispositivo electrónico que almacena energía eléctrica en un campo eléctrico.

En esta clase vamos a seguir estudiando capacitores. Nos vamos a concentrar en arreglos de capacitores, es decir, varios capacitores conectados entre si mediante conductores (cables) formando un circuito. Lo que nos interesa saber es cual el valor de capacidad equivalente entre dos puntos si entre medio hay una dada configuración de capacitores.

Los arreglos típicos que aparecen en circuitos eléctricos son:
- Paralelo
- Serie

Paralelo



Cada $\overset{+Q_i \quad -Q_i}{\dashv C_i \vdash}$ constituye un capacitor

Supongamos que tenemos un arreglo de N capacitores como el de la figura y asumamos que

$$V_A - V_B > 0$$

entonces se van a inducir cargas positivas en las caras izquierdas de los capacitores lo que a su vez va a inducir cargas de igual valor pero signo contrario en las caras derechas de los capacitores.

Tomamos como datos del problema:

$$\Delta V = V_A - V_B, \quad C_i \quad i = 1, \ldots, N$$

Recordemos que para cada capacitor tenemos que

$$C_i = \frac{Q_i}{\Delta V_i} \Rightarrow Q_i = C_i \Delta V_i$$

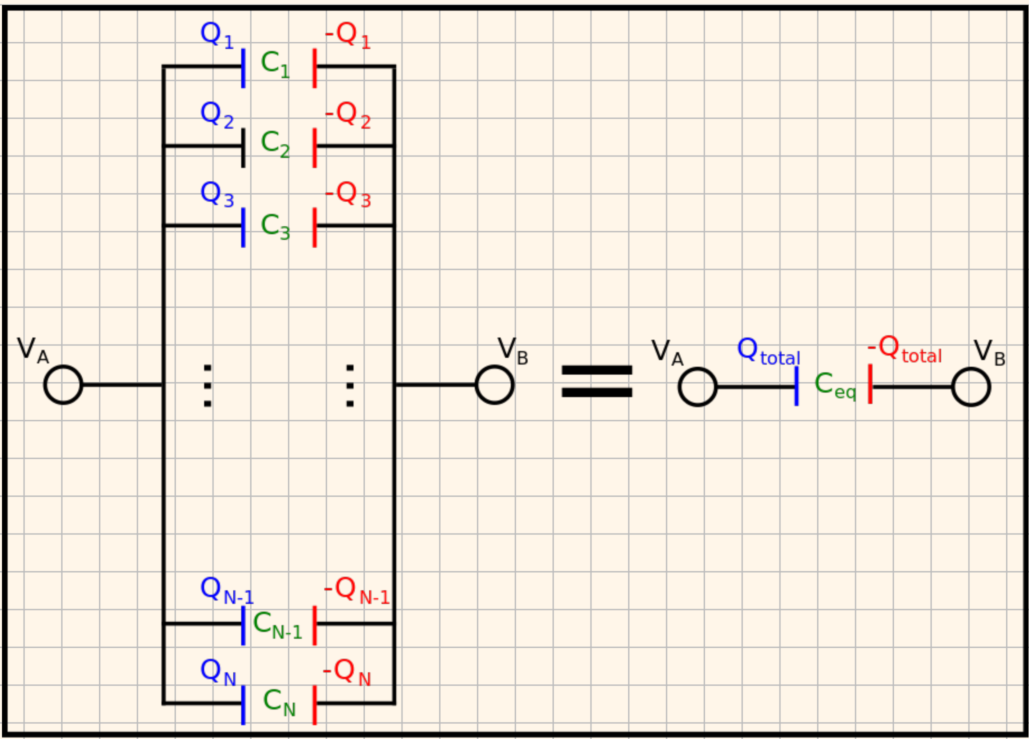
Entonces la carga total del sistema es simplemente la suma de las cargas en cada uno de los capacitores del arreglo:

$$Q_{Total} = \sum_{i=1}^{N} Q_i = \sum_{i=1}^{N} C_i \Delta V_i = \sum_{i=1}^{N} C_i \Delta V$$

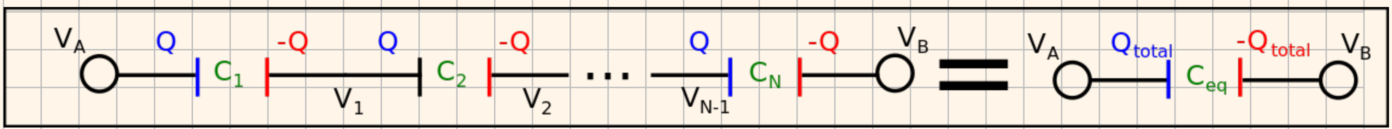
$$= \Delta V \sum_{i=1}^{N} C_i \equiv \Delta V \, C_{eq}^{(par)}$$

donde definimos la capacidad equivalente en paralelo como

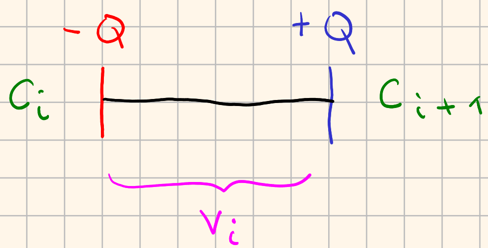
$$C_{eq}^{(par)} = \sum_{i=1}^{N} C_i$$



Serie



Notemos que el conductor que conecta la cara derecha del capacitor i-ésimo y la cara izquierda del capacitor (i+1)-ésimo está aislado, así que la carga total del mismo es cero, por eso la carga inducida de un lado y del otro tiene el mismo valor pero signo opuesto.



La diferencia de potencial entre los términales o bornes A y B es la suma de las diferencias de potencial entre cada una de las caras de todos los capacitoes

$$\Delta V_{AB} = \underbrace{(V_A - V_1)}_{Q/C_1} + \underbrace{(V_1 - V_2)}_{Q/C_2} + \underbrace{(V_2 - V_3)}_{Q/C_3} + \dots + \underbrace{(V_N - V_B)}_{Q/C_N}$$

$$= Q \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \equiv Q\, C_{eq}^{(ser)}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}^{(ser)}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}}$$

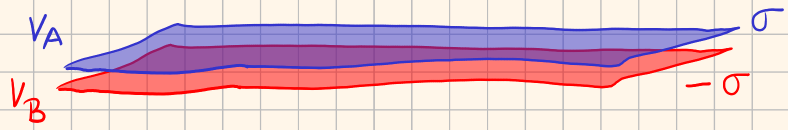
Energía almacenada en un capacitor

La energía electrostática de un sistema de N cargas es

$$U^{int} = \sum_{i<j}^{N} U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N} U_{ij} \qquad \text{con} \qquad \underbrace{U_{ij} = \frac{k\, q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}_{\text{interacción}}$$

Hay un término por cada interacción

En el caso de un capacitor de placas paralelas (una muy buena aproximación en muchos casos) tenemos que



$$U = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i = \frac{1}{2}\underbrace{\sigma A}_{\substack{+Q \\ \text{placa de} \\ \text{arriba}}} V_A + \frac{1}{2}\underbrace{(-\sigma A)}_{\substack{-Q \\ \text{placa de} \\ \text{abajo}}} V_B = \frac{1}{2}\sigma A\left(V_A - V_B\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{1}{2} Q \left(V_A - V_B\right)}$$

si escribimos la energía en términos de la capacidad del arreglo $\quad Q = C\Delta V$

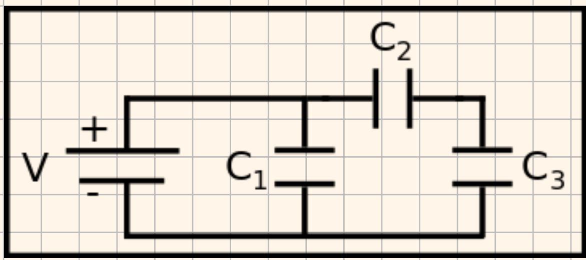
$$\boxed{U = \frac{1}{2} C \Delta V^2}$$

también se puede expresar en términos de la carga acumulada $\quad \Delta V = Q/C$

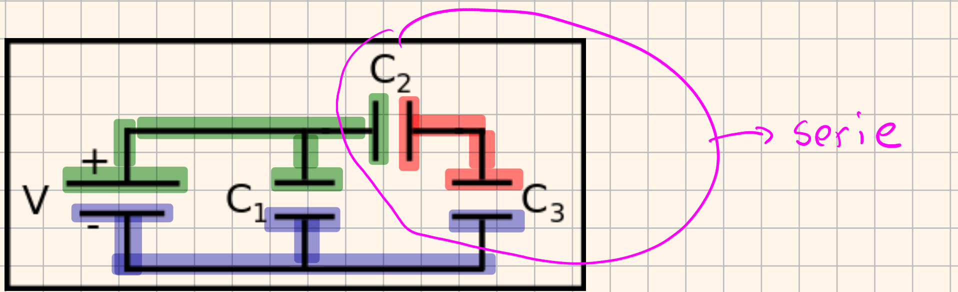
$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

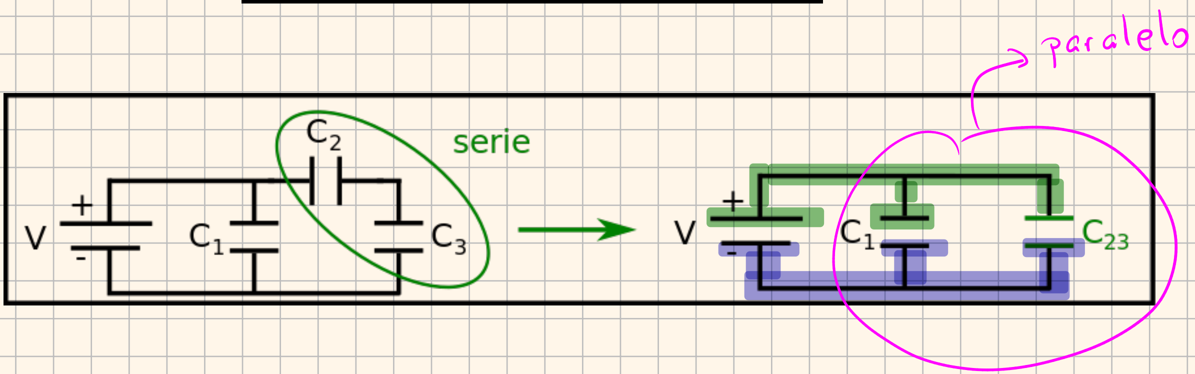
Problema 14

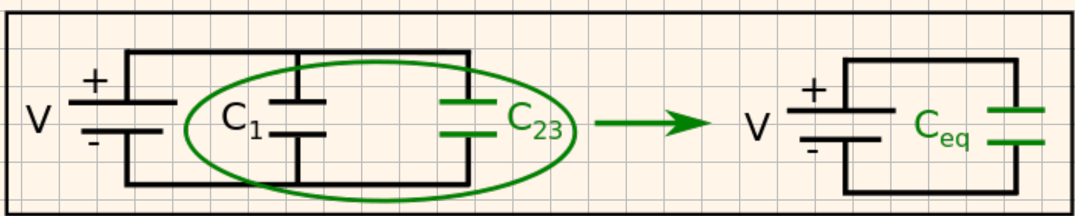
- Hallar la capacidad equivalente del siguiente circuito



Una manera de visualizar cuales son los capacitores que están en paralelo o en serie es identificar los conductores que están a un mismo potencial



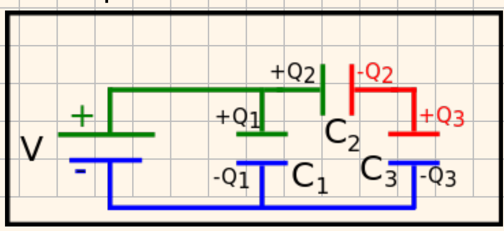




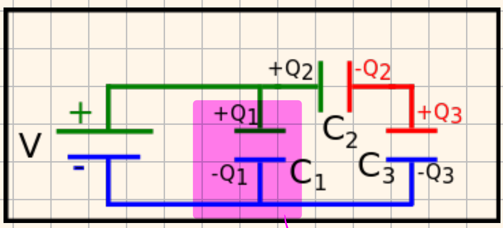
El resultado es

$$C_{eq} = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}{C_2 + C_3}$$

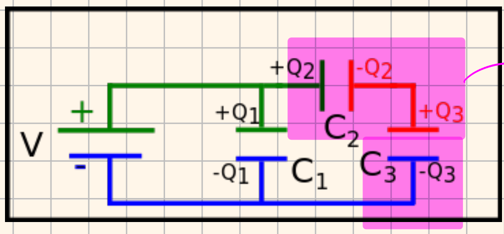
- Cuál es la carga en cada capacitor?



Recordemos que cada conductor es un equipotencial. El conductor verde está a potencial V, el azul a V = 0 (referencia) y el rojo a V' ≠ V (no nos interesar averiguar el valor de V').



$$Q_1 = C_1 V \quad \checkmark$$



serie

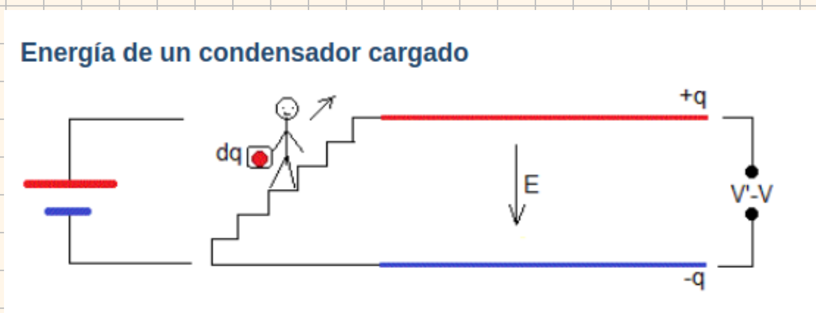
$$V = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = Q_2\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Q_2 = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} V = Q_3 \quad \checkmark$$

- Energía almacenada en el circuito

$$U = \frac{1}{2} C_{eq} V^2$$

Otra forma de verlo:



Fuente: Curso Interactivo de Física en Internet.

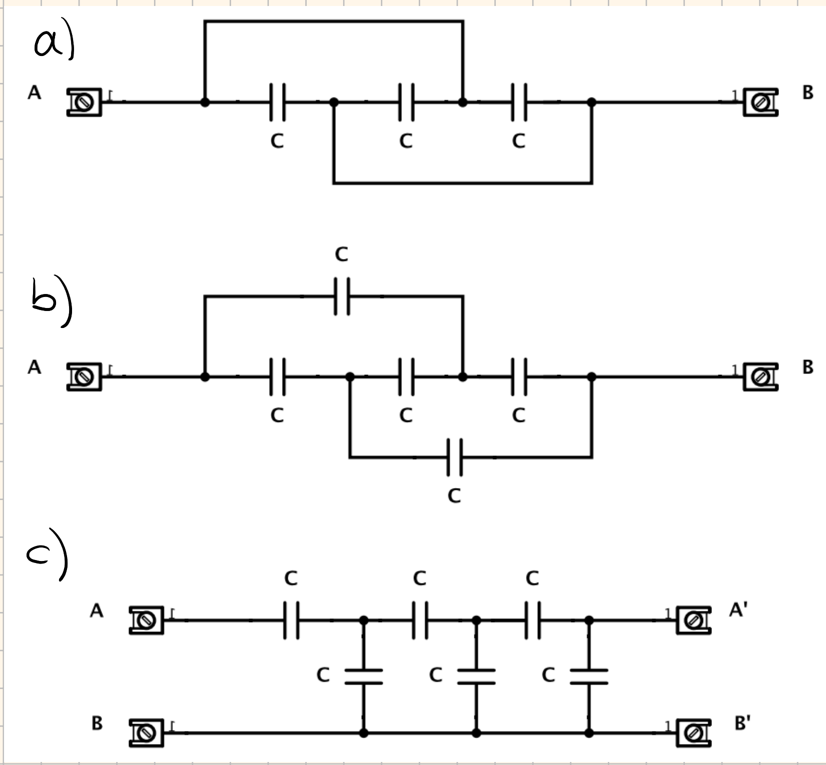
Para calcular la energía necesaria para cargar los capacitores del sistema tenemos que integrar el potencial desde Q = 0 hasta Qtotal

$$U_{int} = W_{bat} = -\int \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = -\int -Q \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l} = \int_0^V Q \, dV$$

$$= \int_0^V C V dV = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

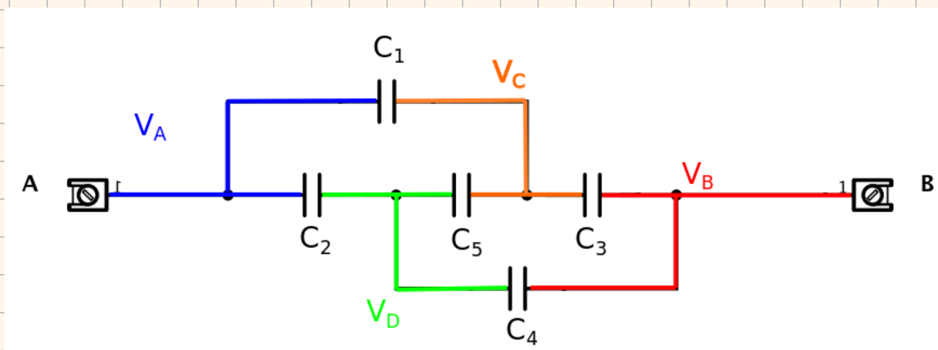
Problema 15

Hallar la capacidad equivalente entre los puntos A y B para los sistemas de las figuras.

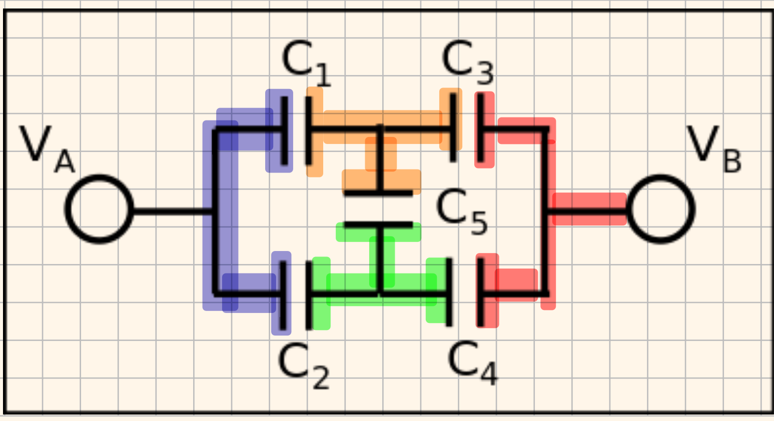


Circuito b)

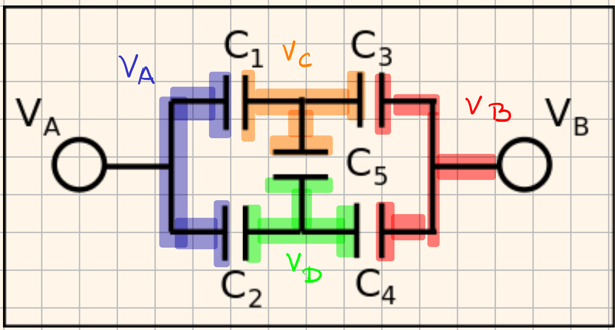
Nos va a resultar útil identificar los conductores que están al mismo potencial



Redibujando el circuito nos queda



Después de pensarlo un rato nos damos cuenta que no es posible agrupar los capacitores en serie y paralelo y hallar capacidades equivalentes. Hay que resolver el circuito calculando las cargas inducidas y las diferencias de potencial.

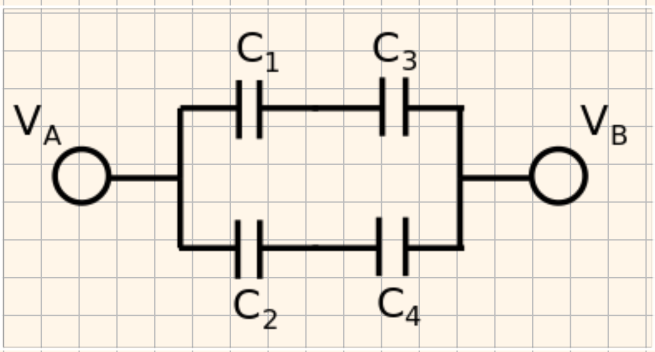


Por suerte $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C$

Notemos que como todas las capacidades son iguales la diferencia de potencial en el capacitor C1 es la misma que en el capacitor C2, lo mismo sucede con los capacitores C3 y C4, es decir

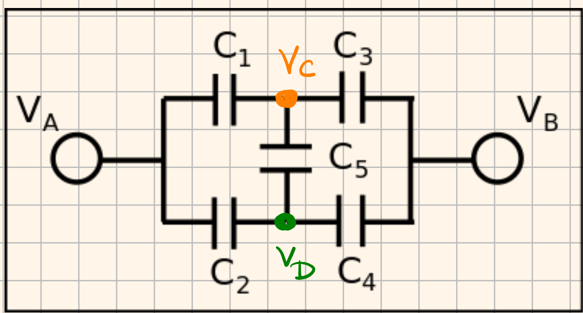
$$V_A - V_C = V_A - V_D \Rightarrow V_C = V_D$$

al no haber diferencia de potencial entre las dos caras del capacitor 5 éste no se carga, es como si NO ESTUVIERA.



Con $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C$

El circuito anterior es un caso simplificado de lo que se conoce como puente de Wheatstone

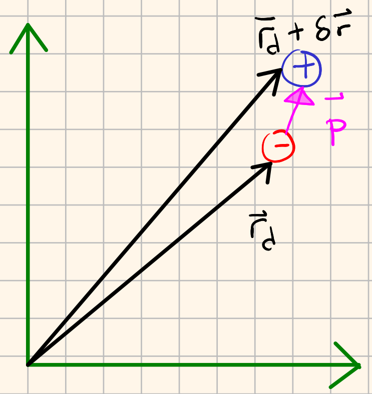


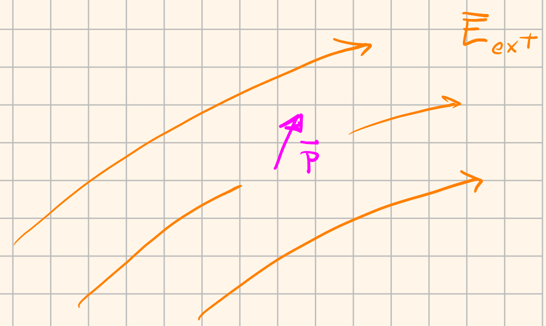
Si se cumple que

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4} = K = \text{const} \Rightarrow \boxed{V_C = V_D}$$

Fuerza y torque sobre un dipolo

- *Fuerza*





Sobre la carga positiva actúa una fuerza $\vec{F}_+$ debido al campo eléctrico externo $\vec{E}_{ext}$

Sobre la carga negativa actúa una fuerza $\vec{F}_-$ debido al campo eléctrico externo $\vec{E}_{ext}$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\,\vec{E}_{ext}(\vec{r}_d + \delta\vec{r}) - q\,\vec{E}_{ext}(\vec{r}_d)$$

Dado que $\dfrac{|\delta\vec{r}|}{|\vec{r}|} << 1$ podemos hacer una aproximación de Taylor

$$\vec{E}_{ext}(\vec{r}_d + \delta\vec{r}) \simeq \vec{E}_{ext}(\vec{r}_d) + \underbrace{(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}_{ext}(\vec{r}_d)}_{\text{comp } \hat{y} \quad \left(\delta x \frac{\partial}{\partial x} + \delta y \frac{\partial}{\partial y} + \delta z \frac{\partial}{\partial z}\right) E^y_{ext}(\vec{r}_d)} + O(|\delta\vec{r}|^2)$$

Recordando que $\vec{p} = q\,\delta\vec{r}$

$$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{E}_{ext}$$

Fuerza sobre un dipolo debido a un campo eléctrico externo

Si $\vec{p} = const$ y $\vec{\nabla}\times\vec{E}_{ext} = 0$ (caso electrostático) $\Rightarrow \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E})$

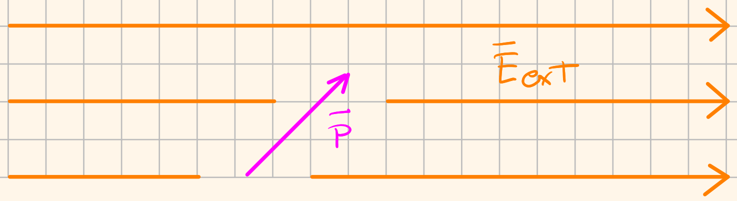
- *Torque (respecto de la ubicación del dipolo)*

$$\vec{\tau}_{ext} = (\vec{r}_d + \delta\vec{r})\times\vec{F}_+ + \vec{r}_d\times\vec{F}_- = \vec{r}_d\times\overbrace{(\vec{F}_+ + \vec{F}_-)}^{\vec{F}} + \delta\vec{r}\times\vec{F}_+$$

$$= \vec{r}_d\times\vec{F}_{ext} + \delta\vec{r}\times q\,\vec{E}_{ext}(\vec{r}+\delta\vec{r})$$

$$\vec{\tau}_{ext} = \vec{r}_d\times\vec{F}_{ext} + \vec{p}\times\vec{E}_{ext}(\vec{r}_d)$$

- Si $\vec{E}_{ext} = const \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$



El torque tiende a querer alinear el dipolo con el campo