06/05/21 **Clase 13: más cosas sobre circuitos**

Repaso

Ley de Ohm:

Es una ley constitutiva, no es de validez general pero aplica a muchos materiales y para varias intensidades de campo eléctrico.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad (1)$$

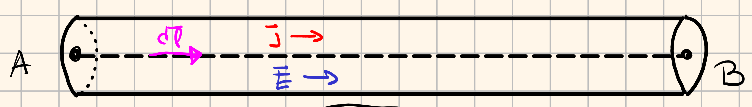
Aquí σ es la conductividad del material. No confundir con la densidad de carga superficial.

Resistividad y resistencia

Definimos la resistividad del material como

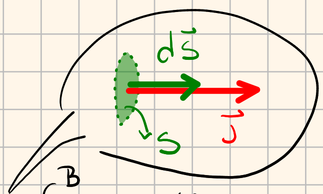
$$\eta \equiv 1/\sigma \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \eta \vec{J} \qquad (2)$$

Otra forma de la ley de Ohm



$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \overset{\vec{E}=-\vec{\nabla} V}{=} +\int_A^B dV$$

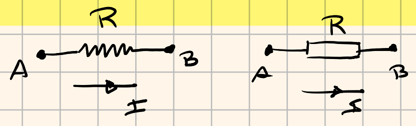
También lo podemos reescribir como



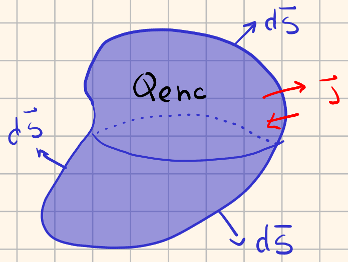
$$V_A - V_B = +\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \overset{\text{Ohm}}{=} \int_A^B \eta \vec{J}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \eta j \, dl$$

$$= \int_A^B \eta j S \frac{dl}{S} \overset{I=Sj}{=} \int_A^B \eta I \frac{dl}{S} \overset{\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0 \Rightarrow I=\text{const}}{=} I \int_A^B \frac{\eta \, dl}{S}$$

$$\Rightarrow \quad V_A - V_B = I R, \qquad R \equiv \int_A^B \frac{\eta \, dl}{S} \qquad (3)$$



Conservación local de la carga eléctrica



$$\frac{dQ_{enc}}{dt} = -\oint_S \vec J\cdot d\vec S$$

$\dot Q_{enc} > 0 \iff \oint_S \vec J\cdot d\vec S < 0$ entra carga

$\dot Q_{enc} < 0 \iff \oint_S \vec J\cdot d\vec S > 0$ sale carga

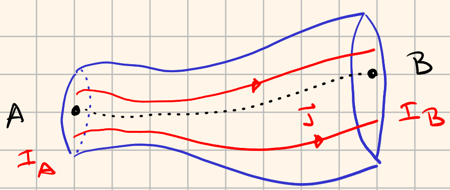
Ecuación de continuidad

$$\ldots \qquad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec\nabla\cdot\vec J = 0} \qquad (4)$$

Corriente estacionaria

Nos vamos a concentar en las situaciones donde no se acumula carga en ningún lado. Hay movimiento de cargas pero es estacionario.

$$\partial_t \rho = 0 \Rightarrow \vec\nabla\cdot\vec J = \vec 0 \Rightarrow \oint_S \vec J\cdot d\vec S = 0 \qquad (5)$$

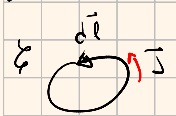


dado que $\oint_S \vec J\cdot d\vec S = 0$

$$\Rightarrow \overbrace{\int_{S_A} \vec J\cdot d\vec S_A}^{I_A} = \overbrace{\int_{S_B} \vec J\cdot d\vec S_B}^{I_B} \Rightarrow I_A = I_B \qquad (6)$$

Las líneas de $\vec J$ "no nacen ni mueren en ningún lado", son líneas cerradas. Los circuitos de corrientes estacionarias son cerrados.

Fuerza Electromotriz (FEM)



Es claro que si calculamos la circulación de $\vec J$ el resultado es no nulo.

$$\oint_{\mathcal C} \vec J\cdot d\vec\ell \neq 0$$

y por otro lado,

$$0 \neq \oint_{\mathcal C} \vec J\cdot d\vec\ell \overset{\text{Ohm}}{=} \oint_{\mathcal C} \sigma \vec E\cdot d\vec\ell = \sigma \int_{\mathcal C} \vec E\cdot d\vec\ell \overset{\vec E = -\vec\nabla V}{=} 0$$

Tiene que haber una fuerza no conservativa que devuelva los portadores de carga nuevamente al potencial de partida luego de recorrer todo el circuito. Debido a la resistencia del material los portadores de carga van perdiendo energía y se necesita un agente externo que se las devuelva (una batería).

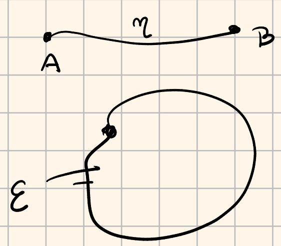
fuerza no conservativa (batería)

Si $\boxed{\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{F}_{nc}/q\right)}$ (*)

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{J}\cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} \sigma\left(\vec{E} + \vec{F}_{nc}/q\right)\cdot d\vec{l} = \overbrace{\oint_{\mathcal{C}} \sigma \vec{E}}^{=0} + \sigma \underbrace{\overbrace{\oint_{\mathcal{C}} \frac{\vec{F}_{nc}}{q}\, d\vec{l}}^{\neq 0}}_{\text{fem}} \neq 0$$

$$\boxed{\text{fem} \equiv \oint_{\mathcal{C}} \frac{\vec{F}_{nc}}{q}\cdot d\vec{l}} \qquad (7)$$

Si repetimos el cálculo anterior para un segmento del circuito



$$\underbrace{\int_A^B \eta \vec{J}\cdot d\vec{l}}_{IR} = \underbrace{\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{V_A - V_B} + \underbrace{\int_A^B \frac{\vec{F}_{nc}}{q}\cdot d\vec{l}}_{\mathcal{E}_{AB}}$$

$$\boxed{IR = V_A - V_B + \mathcal{E}_{AB}} \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_B - V_A = \mathcal{E}_{AB} - IR}$$

Efecto Joule

- *Cuál es la energía disipada en una resistencia?*

$$\delta W = \int_A^B \delta\left(q\vec{E} + \vec{F}_{nc}\right)\cdot d\vec{l} \overset{(*)}{=} \int_A^B \eta\, \delta q\, \vec{J}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{\delta q}{\delta t}\, \delta t\, \eta \vec{J}\cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \delta W = I\,\delta t\, IR \Rightarrow \boxed{\frac{\delta W}{\delta t} = \underbrace{P(R)}_{\text{potencia disipada en la resistencia R}} = I^2 R} \qquad (9)$$

- *Cuál es la potencia entrega por la batería?*

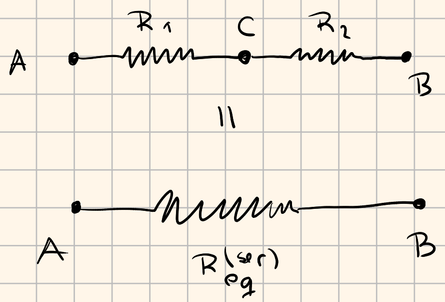
El trabajo realizado por la batería para restituir la diferencia de potencial es

$$\delta W_{fem} = \delta q\, \mathcal{E}$$

diferencia de potencial ganada por los portadores de carga debido a la fem

$$\Rightarrow \frac{\delta W_{fem}}{\delta t} = \frac{\delta q}{\delta t}\,\mathcal{E} = \boxed{I\,\mathcal{E} = P_{fem}} \qquad (10)$$

Resistencias en serie



$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \overset{\text{Ohm}}{=} \int_A^B \eta\, \vec{J}\cdot d\vec{l}$$

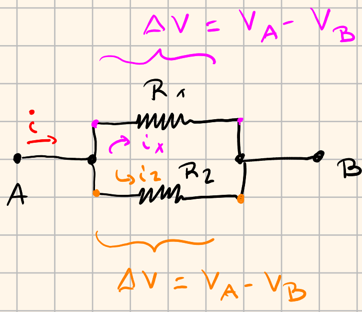
$$\Rightarrow \int_A^B = \int_A^C + \int_C^B$$

$$\Rightarrow V_A - V_B = \underbrace{(V_A - V_C)}_{IR_1} + \underbrace{(V_C - V_B)}_{IR_2} = (R_1 + R_2)\, I = V_A - V_B$$

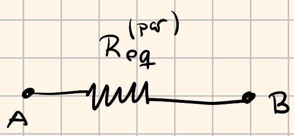
$\Rightarrow$ en gral

$$R_{eq}^{(ser)} = \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad (11)$$

Resistencia en paralelo



=



como $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \Rightarrow$ en un nodo $i = i_1 + i_2 \overset{\text{Ohm}}{=} \frac{(V_A - V_B)}{R_1} + \frac{(V_A - V_B)}{R_2}$

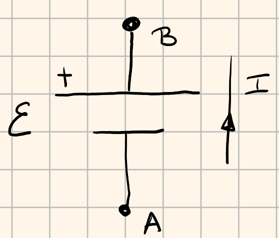
$$\Rightarrow \quad i = (V_A - V_B)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

en general

$$\frac{1}{R_{eq}^{(par)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \qquad (12)$$

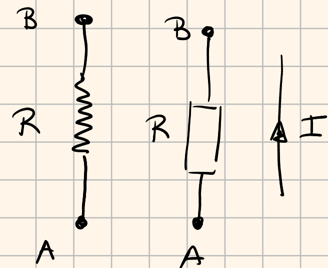
Elementos de circuitos

Batería (o pila o fem)



$$V_B - V_A = \mathcal{E}$$

Resistencia



$$V_B - V_A = -IR$$

$$V_A - V_B = IR$$

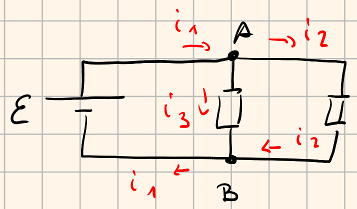
Leyes de Kirchoff

- *Ley de nodos:* $\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{S_1} \bar{J}\cdot d\bar{S}_1 = \int_{S_2} \bar{J}\cdot d\bar{S}_2$

"La suma algebráica de las corrientes de rama en un nodo es cero"

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} i_k = 0} \qquad (13) \qquad i_k: \text{corriente de la rama } k$$

Si en un circuito hay n nodos entonces hay n-1 ecuaciones independientes.



A) $i_1 = i_2 + i_3$

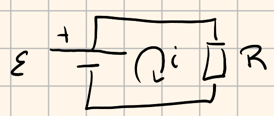
B) $i_2 + i_3 = i_1$

- *Ley de mallas (o de voltajes):*

"En cada malla la suma de las fem se iguala con la suma de las caídas de potencial".

Esta ley es consecuencia de incorporar las fem en el cálculo de la circulación de $\bar{E}$ en un circuito cerrado.

$$(7): \text{fem} \equiv \oint_{\mathcal{C}} \frac{\bar{F}_{nc}}{q}\cdot d\bar{\ell} \quad + \quad \oint_{\mathcal{C}} \bar{J}\cdot d\bar{\ell} \neq 0 \quad + \quad (*): \bar{J} = \sigma\left(\bar{E} + \bar{F}_{nc}/q\right)$$

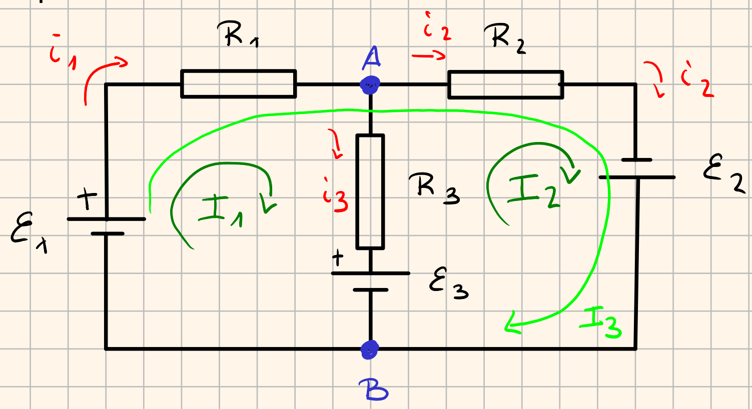


$$\mathcal{E} = R\,i \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E} - R\,i = 0$$

- *Corrientes de mallas:*

Las corrientes de mallas se definen de modo tal que las leyes de nodos se cumplen automáticamente.

Ejemplo:



- Nodo A: $i_1 = i_2 + i_3$
- Nodo B: $i_2 + i_3 = i_1$
- Voltajes malla 1

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 = R_1 i_1 + R_3 i_3$$

$$\mathcal{E}_1 - R_1 i_1 - R_3 i_3 - \mathcal{E}_3 = 0$$

- Voltajes malla 2

$$\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_2 = R_2 i_2 - R_3 i_3$$

$$\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_2 + R_3 i_3 - R_2 i_2 = 0$$

Opción 1: $\{I_1, I_2\}$
Opción 2: $\{I_1, I_3\}$
Opción 3: $\{I_2, I_3\}$

- Corrientes de malla

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= I_1 \\ i_2 &= I_2 \\ i_3 &= I_1 - I_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{se cumple la ley de nodos } i_1 = i_2 + i_3 \ \checkmark \qquad \left.\begin{aligned} i_1 &= I_1 + I_3 \\ i_2 &= I_3 \\ i_3 &= I_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{se cumple la ley de nodos } i_1 = i_2 + i_3 \ \checkmark$$

Definiendo

$E_1 \equiv \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ la fem total en la malla 1

$E_2 \equiv \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$ la fem total en la malla 2

las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned} E_1 &= (R_1 + R_3)\, I_1 - R_3\, I_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 \\ E_2 &= -R_3\, I_1 + (R_2 + R_3)\, I_2 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 \end{aligned}$$

En un caso general nos queda un sistema de ecuaciones lineales acopladas

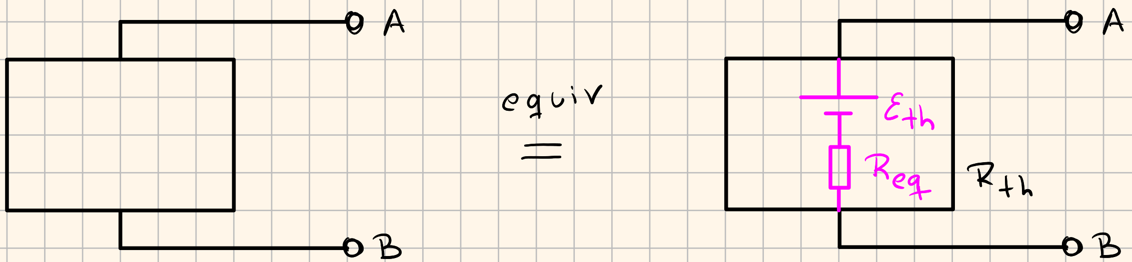
$$\begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{11} & \cdots & \tilde{R}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ \tilde{R}_{n1} & & \tilde{R}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

E_j : es la fem total en la malla j

$\tilde{R}_{jj}$: es la resistencia en la malla j

$\tilde{R}_{jk\neq j}$: es la resistencia compartidas por las mallas k≠j con el signo cambiado

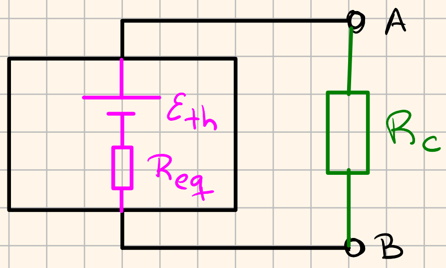
Equivalente de Thévenin



Visto desde los terminales (bornes) A y B el circuito se comporta como una fem equivalente (de Thévenin) + una resistencia equivalente.

- $\mathcal{E}_{th}$ es igual a la diferencia de potencial entre A y B a circuito abierto, es decir, cuando no circula corriente entre A y B (la resitencia entre esos puntos es ∞.
- R_{eq} se calcula "cortocircuitando" la fuente, es decir, se reemplaza la fuente por un cable y se calcula la resistencia equivalente entre A y B.

Otras relaciones útiles



$\rightarrow$ resistencia de carga

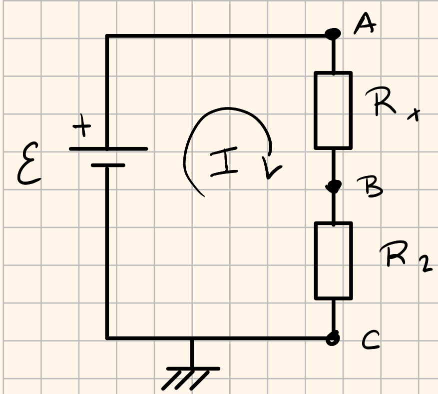
- Si $R_c \rightarrow \infty$ circuito abierto $V_A - V_B = \mathcal{E}_{th}$
- Si $R_c \rightarrow 0$ la corriente que circula entre A y B es la corriente de cortocircuito I_{cc}

Y vale la siguiente relación

$$\mathcal{E}_{th} = R_{eq} I_{cc} \quad (14)$$

Precalentamiento: divisor de tensión y divisor de corriente

- *Divisor de tensión*



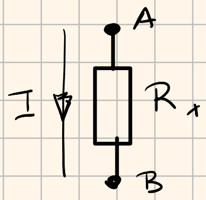
Ley de Kirchoff de voltajes

$$\boxed{\mathcal{E} - R_1 I - R_2 I = 0}$$

$$\mathcal{E} = R_1 I + R_2 I$$

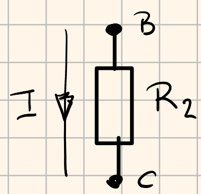
$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}}$$

$V_A - V_B = ?$ por la ley de Ohm (3) tenemos que



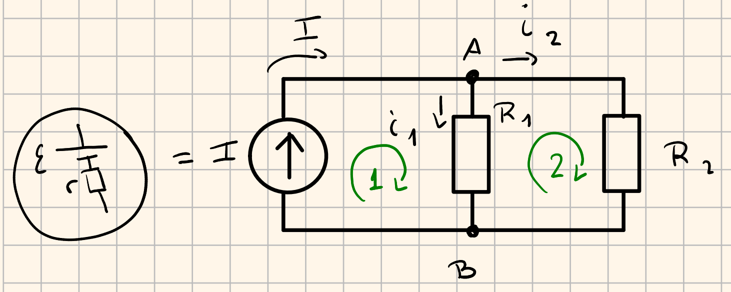
$$V_A - V_B = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\mathcal{E} = \frac{R_1}{R_{eq}}\mathcal{E} = V(R_1)$$

$V_B - V_C = ?$ por la ley de Ohm (3) tenemos que



$$V_B - V_C = I R_2 = \frac{R_2\,\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R_{eq}}\mathcal{E} = V(R_2)$$

- Divisor de corriente



Ley de nodos en A

$$I = i_1 + i_2 \qquad (1)$$

Ley de voltajes en la malla 2

$$-R_2 i_2 + R_1 i_1 = 0 \qquad (2)$$

de (2) $\quad \dfrac{i_1}{i_2} = \dfrac{R_2}{R_1} \iff i_1 = \dfrac{R_2}{R_1} i_2 \quad (3)$

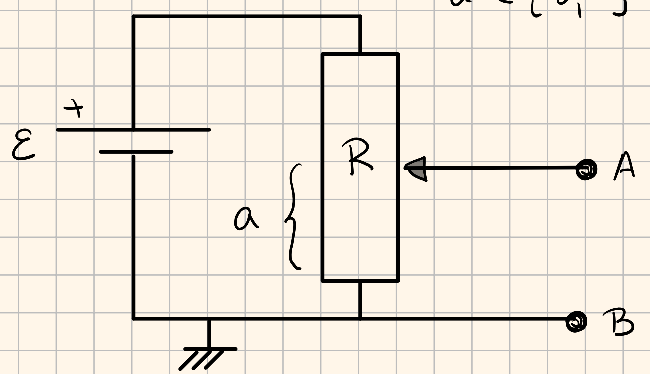
en (1) $\quad I = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1} i_2 \iff i_2 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} I = \dfrac{R_{eq}}{R_2} I = i_2$

en (3) $\quad i_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} I = \dfrac{R_{eq}}{R_1} I = i_1$

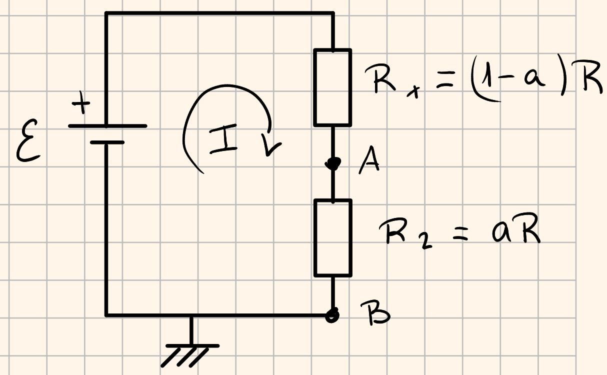
Problema 10: hallar los equivalentes de Thévenin

a) Potenciómetro

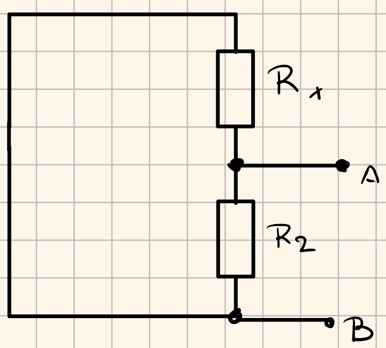
$a \in [0, 1]$



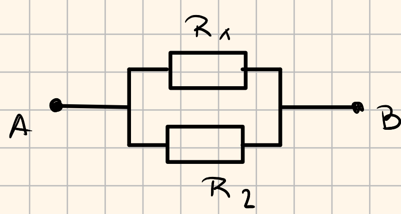
=



$R_{th} = ?$ cortocircuitamos la fuente



=



$$\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

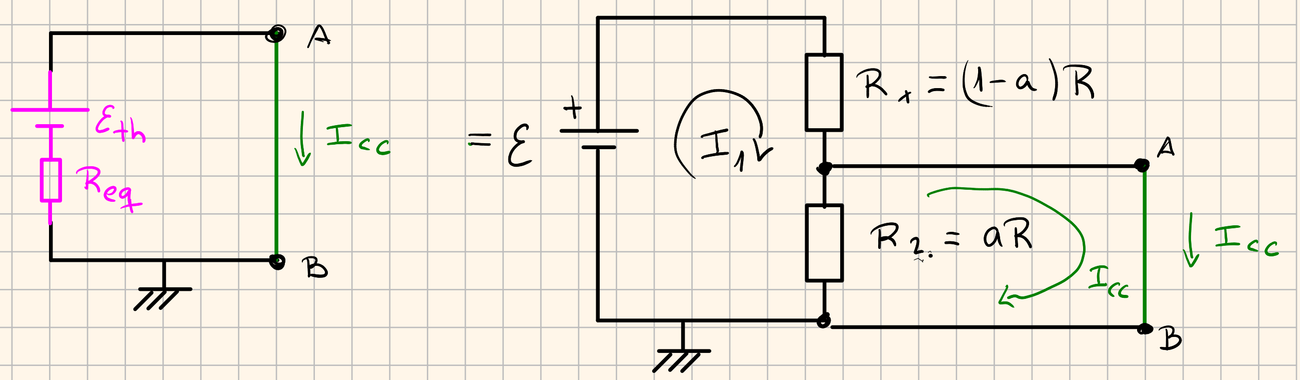
$$R_{eq} = R_{th} = (1-a)aR$$

$\mathcal{E}_{th} = ?$ tenemos que calcular la diferencia de potencial entre A y B a circuito abierto. Eso ya lo hicimos con el divisor de tensión. En este caso va a coincidir con la diferencia de potencial en la resistencia R2

$$\boxed{\mathcal{E}_{th} = a\,\mathcal{E}}$$

Vamos a ver en este ejemplo simple cómo calcular la fem de Thévenin de otras maneras y ver que todo da lo mismo.

Calculemos la corriente de cortocircuito y recordemos que $\mathcal{E}_{th} = R_{th} I_{cc}$



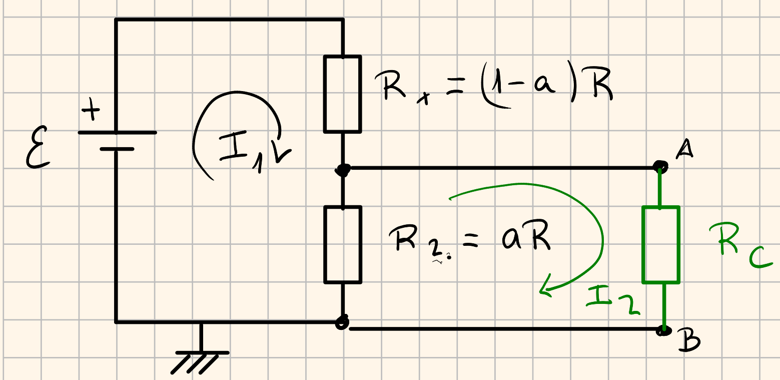
Las ecuaciones de mallas quedan

$$\mathcal{E} - R_1 I_1 - R_2 (I_1 - I_{cc}) = 0 \qquad (1)$$
$$R_2 (I_{cc} - I_1) = 0 \qquad (2)$$

de (2) $I_1 = I_{cc}$ en (1) $\rightsquigarrow$ $I_{cc} = \mathcal{E}/R_1$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{th} = R_{th} I_{cc} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \mathcal{E} = \boxed{a\mathcal{E} = \mathcal{E}_{th}} \checkmark$$

Ahora calculemos la fem de Thévenin conectando una resistencia de carga Rc, calculando la diferencia de potencial (caída) en ella y tomando el límite Rc →∞



En este caso las ecuaciones de malla quedan

$$\mathcal{E} - R_1 I_1 - R_2(I_1 - I_2) = 0 \qquad (3)$$

$$-R_c I_2 - R_2(I_2 - I_1) = 0 \qquad (4)$$

de (4)

$$I_1 = \frac{(R_c + R_2)}{R_2} I_2 \qquad (4')$$

y reemplazando en (3)

$$\mathcal{E} = \frac{(R_1 R_c + R_1 R_2 + R_2 R_c)}{R_2} I_2 \qquad (5)$$

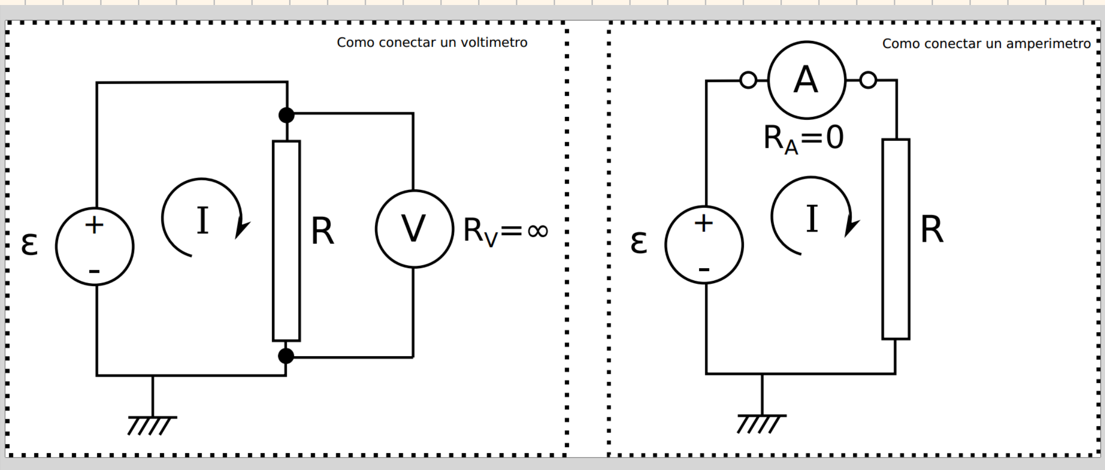
de (5) despejamos I2

$$I_2 = \frac{R_2 \mathcal{E}}{R_c(R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R_c)} \qquad (5')$$

La caída tensión (diferencia de potencial) en la resistencia de carga es

$$V(R_c) = R_c I_2 = \frac{R_2 \mathcal{E}}{(R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R_c)} \xrightarrow{R_c \to \infty} \boxed{\frac{R_2 \mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \mathcal{E}_{th}}$$

Cómo conectar amperímetros y voltímetros



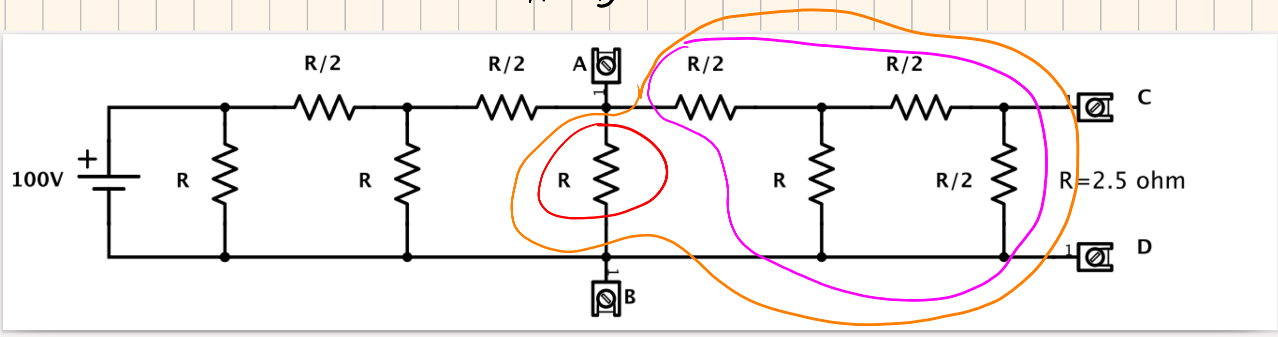
El voltímetro se conecta en paralelo a la caída de tensión que se desea medir y debe ser a circuito abierto (la corriente que circula a través del voltímetro debe ser despreciable $R_{Vot} \simeq \infty$).

El amperímetro se conecta en serie con la rama del circuito para medir la corriente que circula por ella, es decir, se hace en cortocircuito (el amperímetro no debe generar una caída de tensión que afecte al circuito $R_{Amp} \simeq 0$).

Algunos comentarios sobre problemas de la guía

Problema 9

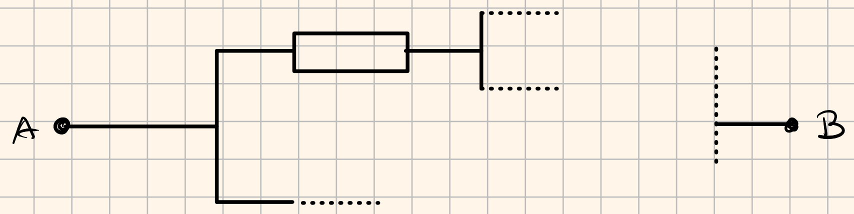
Obtener la diferencia de tensión $V_A - V_B$ utilizando el teoréma de Thévenin.



Para esto hay que identificar cuál es la resistencia de carga.

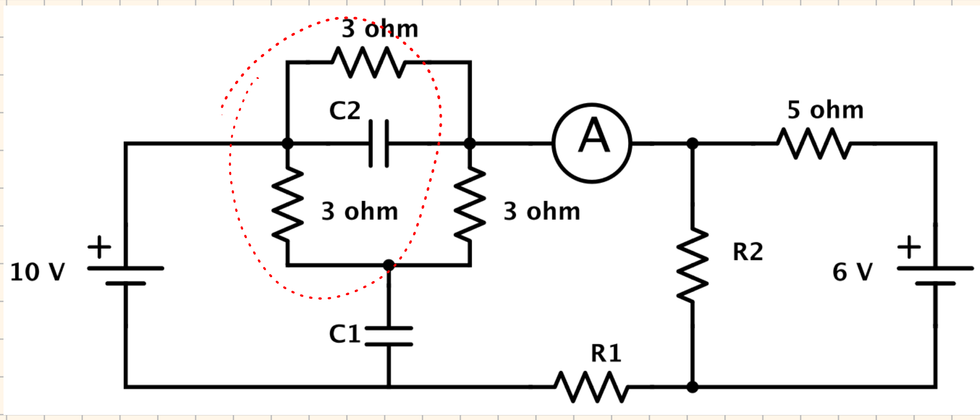
Los distintos colores indican tres posibilidades distintas cuyo resultado final debe ser el mismo.

Para obtener la resistencia equivalente puede ser útil redibujar el circuito como



Problema 13

Asumir que los capactitores ya están cargados.



También puede ser útil pensar la zona recuadrada como un divisor de corriente.