

27/05/21 **Clase 15: Ley de Ampère**

Las ecuaciones de la magnetostática son

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

no hay fuentes de divergencia para B (no existen monopolos magnéticos)

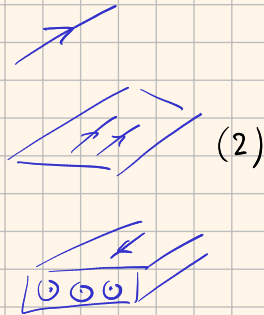
ley de Ampère

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad \partial_t \rho = 0, \quad \partial_t \vec{J} = \vec{0} \quad (1)$$

corrientes estacionarias

La clase pasada vimos la ley de Biot-Savart para el campo magnético

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{K}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau' \end{aligned}$$



Distribuciones de corriente

$$d\vec{I} = I d\vec{\ell} = \vec{K} d\tau = \vec{J} d\tau \quad (3)$$

↳ tmb se la denomina \vec{J}

Unidades: $[B] = \text{Tesla}$, $[\mu_0] = \frac{\text{Tm}}{\text{A}}$, $[I] = \text{A}$, $[K] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$, $[\vec{J}] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

● **Ley de Ampère**

Si tomamos la ecuación del rotor de B e integramos en una superficie

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

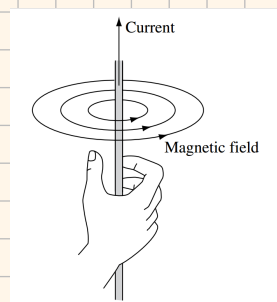
Teo Stokes

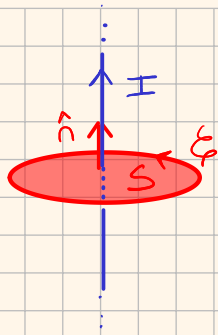
$$\int_S \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{conc}}$$

corriente concatenada

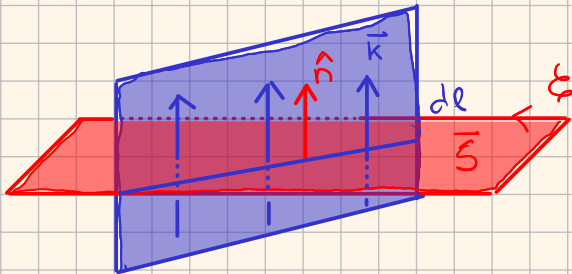
$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{conc}} \quad (4)$$

La orientación del circuito de Ampère para calcular la circulación de B y de la superficie para obtener la corriente concatenada I_{conc} están determinados por la regla de la mano derecha.



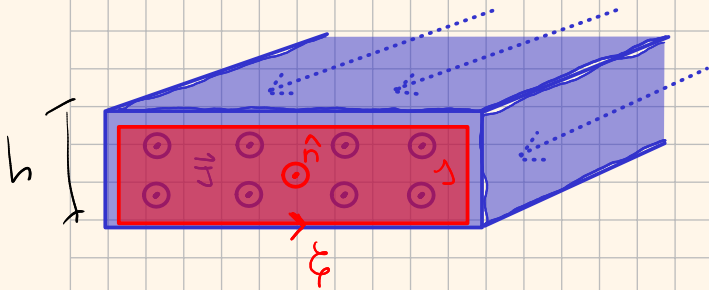


$$I_{\text{conc}} = + I$$



si $\vec{K} = K_0 \hat{n}$

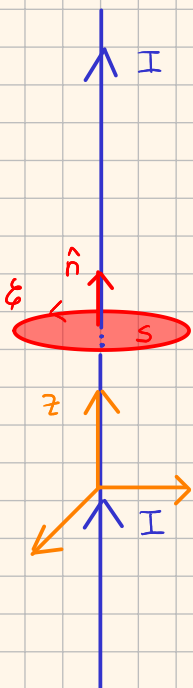
$$I_{\text{conc}} = \int \vec{K} \cdot \hat{n} dl = K_0 L$$



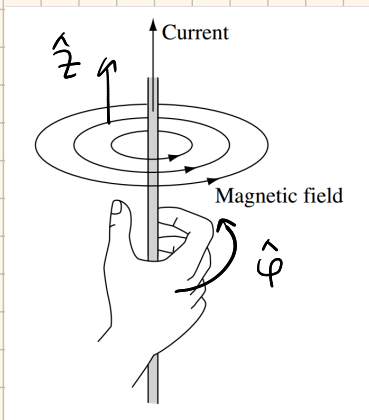
$$I_{\text{conc}} = \int \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

► Problema 8

- a) Cable rectilíneo infinito



Por la regla de la mano derecha podemos inferir la dirección del campo magnético.



La distribución de corriente es uniforme, $I = \text{const}$, para satisfacer la condición estacionaria.

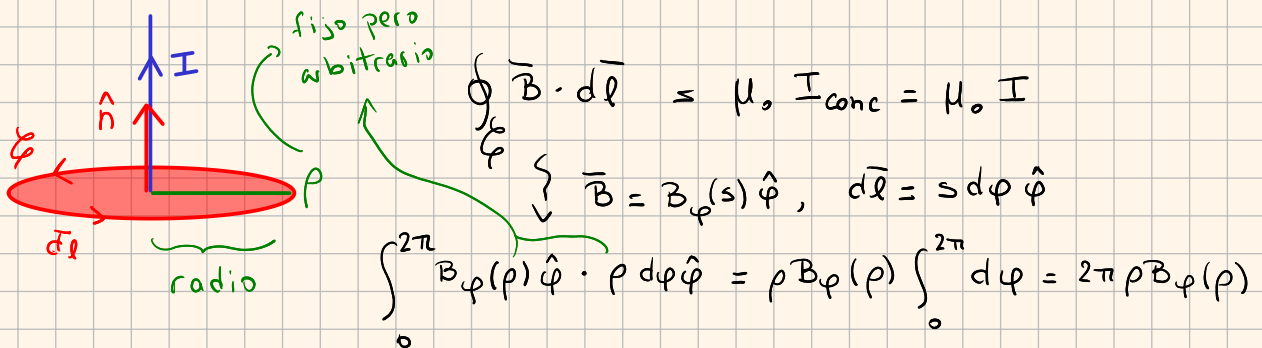
La distribución de corriente es invariante ante traslaciones en la dirección z y ante rotaciones respecto al mismo eje.

Utilizamos coordenadas cilíndricas: $\{\rho, \varphi, z\}$

coord radial cilíndricas

$$\vec{B}(\vec{r}) = \cancel{B_\rho(\rho, \varphi, z) \hat{\rho}} + B_\varphi(\rho, \varphi, z) \hat{\varphi} + \cancel{B_z(\rho, \varphi, z) \hat{z}} \quad (5)$$

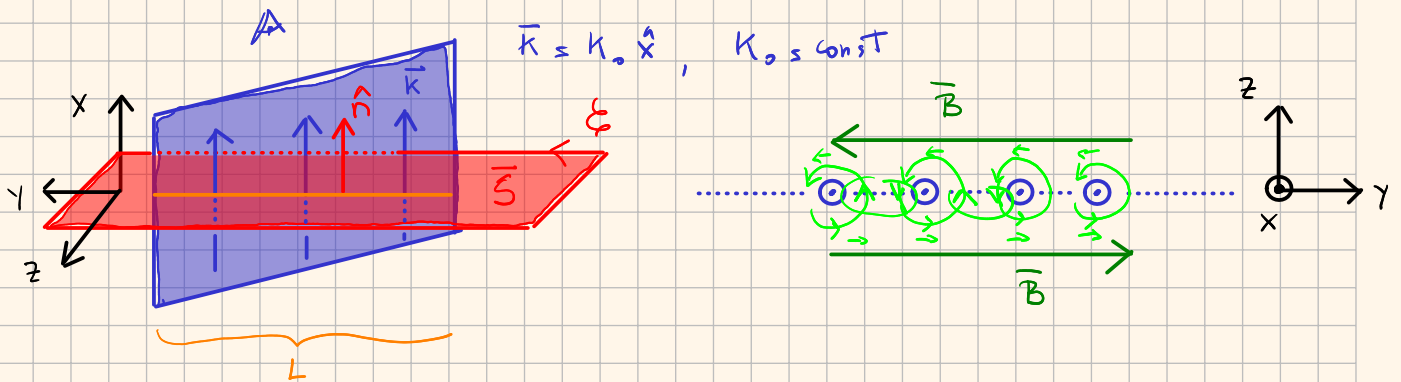
Como en el caso electrostático cuando utilizábamos la ley de Gauss, la ley de Ampère es útil si podemos inferir, utilizando argumentos de simetría (y la regla de la mano derecha), cuáles son las componentes no nulas del campo magnético y cuáles son las coordenadas de las que éste depende. Sabiendo esto, podemos elegir los circuitos de Ampère de modo tal que en la integral de circulación el integrando sea constante y se pueda factorizar.



$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(\rho) \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{\phi} \quad (6)$$

d) Placa con corriente superficial

Por la regla de la mano derecha la dirección de B debe ir en la dirección y



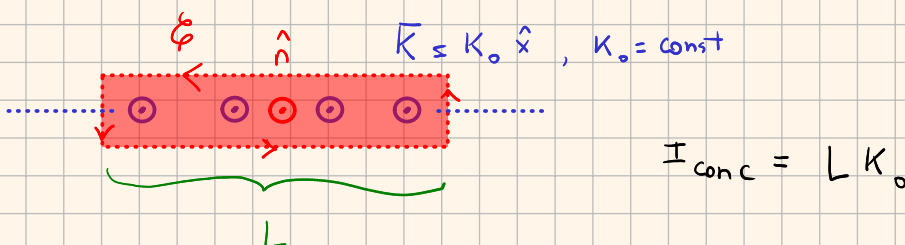
La distribución de corriente es uniforme y no depende de x ni de y. Es invariante frente a traslaciones en el plano (x,y).

Combinando esto con la información obtenida de la regla de la mano derecha:

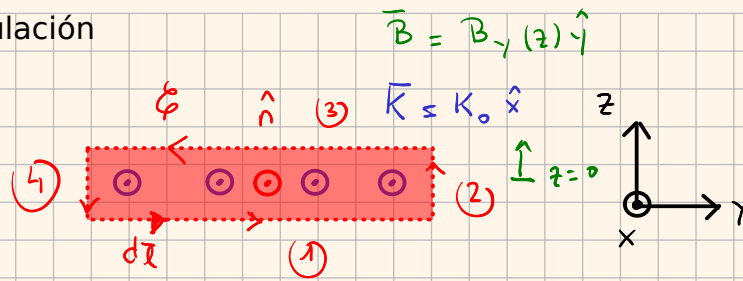
$$\vec{B}(\vec{r}) = B_y(z) \hat{y} \quad (7)$$

y $B_y(z)$ debe cambiar de signo cuando z cambia de signo.

Corriente concatenada



Integral de circulación



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{(1)} + \int_{(2)} + \int_{(3)} + \int_{(4)} = \int_{(1)} + \int_{(3)}$$

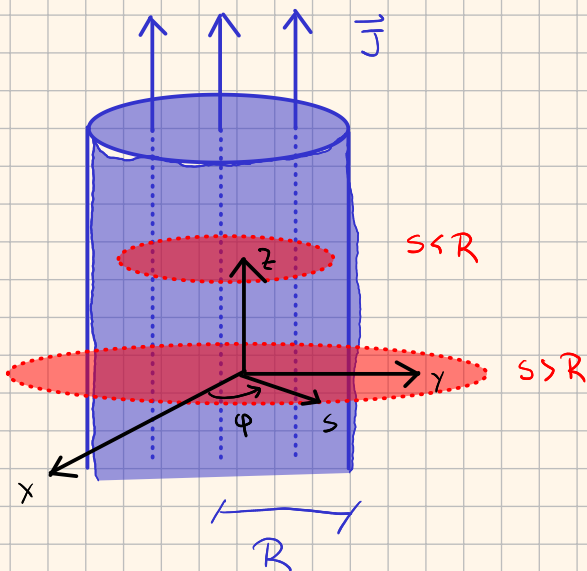
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \underbrace{\int_{-L/2}^{+L/2} B_y(z) (+\hat{y}) \cdot (+\hat{y}) dy}_{\text{(1) } z < 0 \quad \vec{B} \rightarrow} + \underbrace{\int_{-L/2}^{+L/2} B_y(z) (-\hat{y}) \cdot (-\hat{y}) dy}_{\text{(3) } z > 0 \quad \vec{B} \leftarrow}$$

$$\int_{(1)} \vec{B} = +B_y \hat{y} \qquad \int_{(3)} \vec{B} = -B_y \hat{y}$$

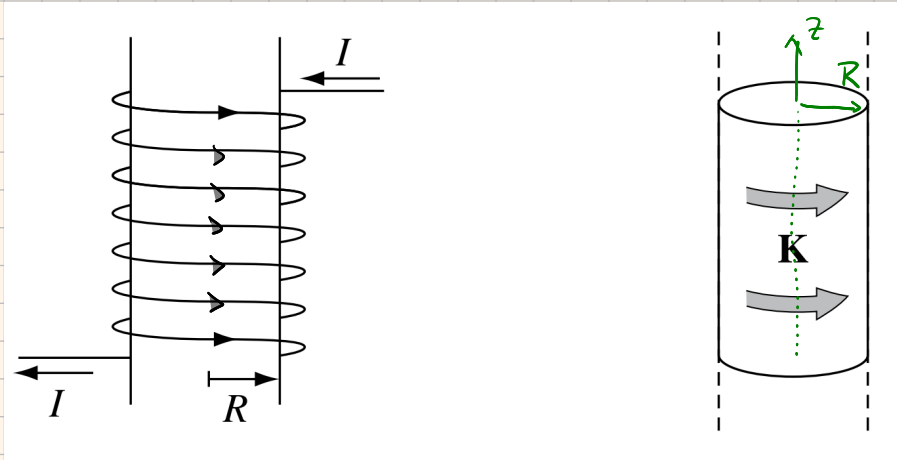
$$= 2L B_y(z) = \mu_0 L K_0 \Rightarrow B_y(z) = \mu_0 / 2 K_0$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_y(z) \hat{y} = \begin{cases} -\mu_0 K_0 / 2 \hat{y} & z > 0 \\ +\mu_0 K_0 / 2 \hat{y} & z < 0 \end{cases} \quad (8)$$

● b) Cilindro infinito con corriente en volumen



c) Solenoide infinito



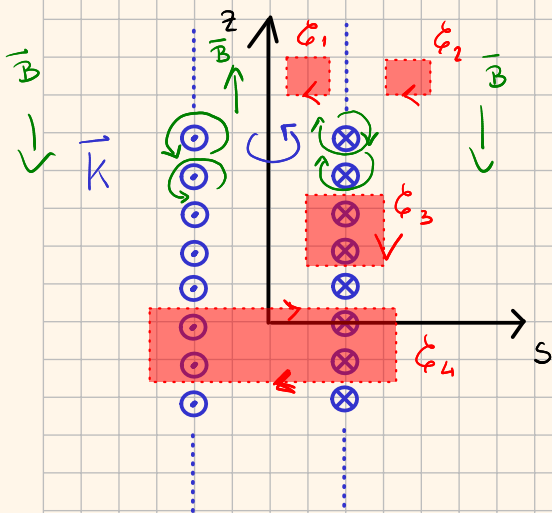
Si el devanado es muy apretado, el solenoide puede pensarse como un conjunto de anillos apilados uno encima del otro. A su vez, la corriente que circula por la superficie del solenoide puede pensarse como una corriente superficial K.

Supongamos que el solenoide tiene en total N vueltas y un largo L, entonces la corriente total que circula a través del mismo es $I_{tot} = N I$. Por otro lado, pensando el solenoide como un cilindro con corriente superficial $\vec{K} = K_0 \hat{\phi}$

$$N I = \int_{-L/2}^{+L/2} \vec{K} \cdot \hat{n} dz = K_0 L \Rightarrow K_0 = \frac{N I}{L} = n I \quad (9)$$

$n \equiv N/L$

Corte del solenoide

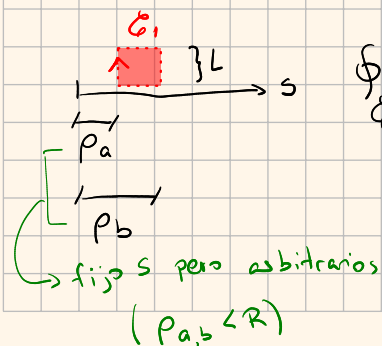


Utilizando la regla de la mano derecha podemos inferir que el campo magnético va a apuntar en la dirección z, tanto fuera como dentro del solenoide.

La distribución de corriente tiene simetría de rotación alrededor del eje z y de traslación a lo largo del mismo, entonces va a depender de la coordenada radial de cilíndricas

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_z(\rho) \hat{z} \quad (10)$$

► G_1 : $I_{conc} = 0$



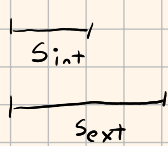
$$\oint_{G_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^L B(\rho_a) \hat{z} \cdot \hat{z} dz + \int_0^L B(\rho_b) \hat{z} \cdot (-\hat{z}) dz$$

$$= L (B(\rho_a) - B(\rho_b)) = 0$$

$$\Rightarrow B(\rho_a) = B(\rho_b) = \text{const en el interior} \quad (11.1)$$

► ζ_2 : idéntico al caso del circuito 1. $B = \text{const}$ en el exterior (11.2)

► ζ_3 : $L \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right. \zeta_3$ $I_{\text{conc}} = \overbrace{n I}^{K_0} L$, donde definimos $n \equiv N/L$



$$\oint_{\zeta_3} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^L B(s_{\text{int}}) \hat{z} \cdot \hat{z} dz + \int_0^L B(s_{\text{ext}}) (-\hat{z}) \cdot (-\hat{z}) dz$$

$$= L (B_{\text{int}} + B_{\text{ext}}) = \mu_0 n I L$$

$$\Rightarrow B_{\text{int}} + \cancel{B_{\text{ext}}} = \mu_0 n I \quad (12)$$

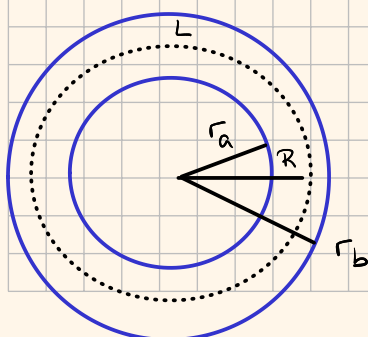
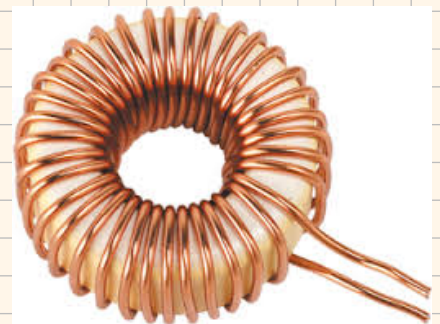
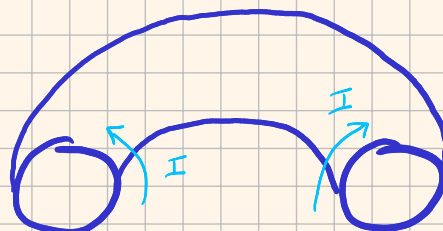
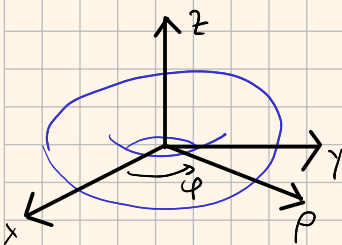
Si asumimos que el campo fuera del solenoide es cero, entonces tenemos que

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_z(s) \hat{z} = \begin{cases} \mu_0 n I & s < R \\ 0 & s > R \end{cases} \quad (13)$$

Es posible calcular el campo del solenoide infinito utilizando la ley de Biot-Savart. Se puede ver en el libro de Zangwill, "Modern electrodynamics", Sección 10.2.2. También en el pdf de la Clase 15 de Susana de cuatrimestres anteriores.

Un argumento "con los dedos" que se puede dar es el siguiente: De un modo similar a lo que ocurre con un hilo cargado en electrostática, o un hilo con corriente en magnetostática, a pesar de que las distribuciones son infinitas, para cada punto campo las fuentes que contribuyen crecen linealmente con la distancia radial; pero el campo magnético (y el eléctrico) decrecen con el cuadrado de la distancia. Este argumento también es útil para "entender" porqué los campos de distribuciones infinitas de corriente (o carga) superficial son constantes, las fuentes que contribuyen al campo crecen como el área, es decir, se compensan con el decaimiento $1/r^2$.

Otra forma de convencerse de que el campo del solenoide fuera del mismo es cero es obtenerlo mediante un proceso de límite del campo de un toroide.



$$R = \frac{r_a + r_b}{2}$$

Si calculan el campo magnético del toroide (inciso g del problema 8) van a ver que fuera del mismo el campo es nulo. Si tomamos el límite en el que $r_a \approx r_b$ el campo magnético dentro del toroide es aproximadamente constante. Si además consideramos el caso en el que $R \rightarrow \infty$ cada sección de arco del toroide se parece a un tramo recto del solenoide.