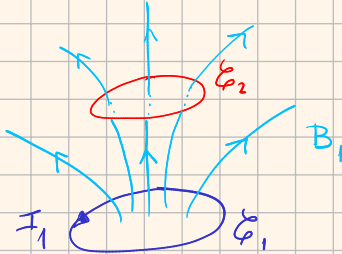


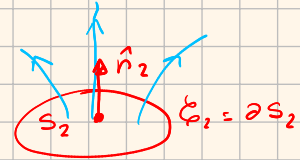
► *Coeficientes de Inducción*

Tenemos dos espiras \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 cuya posición es fija en el espacio. Por la espira 1 circula una corriente I_1 que genera un campo \vec{B}_1 .

Este campo, al atravesar la espira 2, genera un flujo de campo magnético Φ_2 a través de la misma.



$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \quad (1)$$



De la ley de Biot-Savart sabemos que

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{\mathcal{C}_1} d\vec{l}_1 \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Rightarrow B_1 \propto I_1 \quad (2)$$

Reemplazando esta expresión en (1) podemos ver que el flujo del campo \vec{B}_1 a través de la espira 2 es directamente proporcional a la corriente que circular por la espira 1

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \quad (3)$$

Al coeficiente de proporcionalidad M_{21} se lo denomina coeficiente de inductancia mutua.

Recordando la relación entre el potencial vector \vec{A} el campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ podemos hallar una expresión para M_{21} puramente geométrica

$$\vec{B}_1 = \nabla \times \vec{A}_1 \quad \text{y} \quad \vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{d\vec{l}'_1}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \stackrel{(4)}{=} \dots \stackrel{\text{Teo Stokes}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\vec{l}'_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}'_1 - \vec{r}_2|} = M_{21} I_1$$

$$\therefore M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \equiv M \quad (5) \quad M_{12} = M_{21}$$

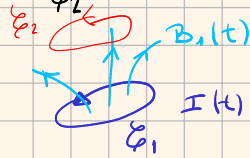
(Fórmula de Neumann)

▲ Obs 1: Notar que M es una cantidad puramente geométrica, depende únicamente de la forma y disposición de los circuitos 1 y 2.

▲ Obs 2: La fórmula (5) vale tanto para calcular Φ_2 cuando una corriente I circula por \mathcal{C}_1 como para calcular Φ_1 cuando I circula por \mathcal{C}_2

► FEM inducida y Autoinductancia

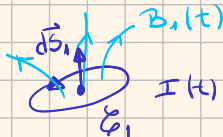
Notemos que si la corriente I que circula por \mathcal{C}_1 varía con el tiempo, entonces se va a inducir una fem en \mathcal{C}_2 por la ley de Faraday



$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d}{dt} \Phi_2 = - M \frac{dI_1}{dt} = \mathcal{E}_2 \quad (6)$$

Faraday
 $\Phi_2 = M I_1$

Al mismo tiempo, esta corriente variable hace que B también varíe con el tiempo produciendo un cambio en el flujo a través de \mathcal{C}_1 . Este flujo va a ser proporcional a la corriente que circula por \mathcal{C}_1 .



$$\Phi = L I \quad (7)$$

L es el coeficiente de autoinductancia * y depende únicamente de la geometría del circuito \mathcal{C}_1 .

Claramente, esta misma corriente variable $I(t)$ produce una fem en \mathcal{C}_1 que se va a oponer a la variación de flujo de campo magnético

$$\mathcal{E} = - L \frac{dI}{dt} \quad (8)$$

▲ Unidades: $[L] = \text{Henry} = \text{V seg} / \text{A}$

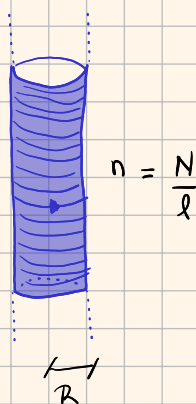
● Problema 8

Calcular las autoinductancias de:

- Un solenoide infinito
- Un toroide de N vueltas y radio R
- Un solenoide de longitud l y radio R ($R/l \ll 1$) y N vueltas

a) Solenoide ∞ : De la Problema 8 de la Guía 4 sabemos que

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_z(\rho) \hat{z} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z} & \rho < R \\ 0 & \rho > R \end{cases} \quad (9)$$



coordenadas cilíndricas: $\{\rho, \varphi, z\}$

Como el campo del solenoide es constante en el interior del mismo, podemos calcular el flujo a través de una sola espira y luego sumar la contribución de todas las espiras que lo conforman.

El flujo a través de una sola espira es

$$\Phi^{(1)} = B_z \pi R^2 = \mu_0 n I \pi R^2 \quad (10)$$

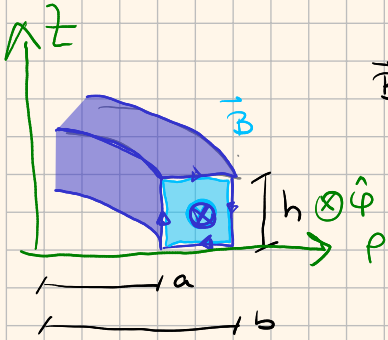
* En esta clase L es el símbolo de la autoinductancia. Para indicar longitudes utilizaremos l .

El solenoide tiene $N = n \ell$ vueltas en total, el flujo a través de todo el solenoide es

$$\Phi = N \Phi^{(1)} = \mu_0 n^2 \ell \pi R^2 I = L I \Rightarrow L = \mu_0 n^2 \pi R^2 \ell$$

$$\frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 \pi R^2 \quad (11) \quad \text{Autoinductancia por unidad de longitud}$$

b) Toroide: del Problema 8 de la Guía 4 sabemos que



$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(\rho) \hat{\phi} = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I}{2\pi \rho} \hat{\phi} & a < \rho < b \\ 0 & \rho < a, \rho > b \end{cases} \quad (12)$$

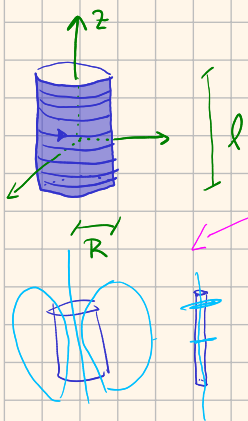
El campo magnético es el mismo en cada sección transversal del toroide entonces podemos calcular el flujo de campo magnético a través de una espira y luego multiplicar por el número de espiras total.

$$\Phi^{(1)} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \int_0^h \frac{\mu_0 N I}{2\pi \rho} \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} d\rho dz = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) h$$

El flujo total es $\Phi = N \Phi_1 = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (13)$$

c) Solenoide finito: del Problema 9 de la Guía 4 sabemos que el campo sobre el eje es



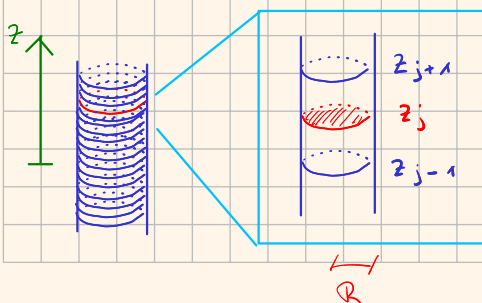
$$\vec{B}_{eje}(z) = \frac{\mu_0 N I}{2\ell} \left\{ \frac{(z + \ell/2)}{\sqrt{R^2 + (z + \ell/2)^2}} - \frac{(z - \ell/2)}{\sqrt{R^2 + (z - \ell/2)^2}} \right\} \hat{z} \quad (14)$$

Teniendo en cuenta que $R/\ell \ll 1$ podemos aproximar el campo magnético por su valor en el eje z para cada sección transversal a $z = \text{const}$.

solenoides muy estrechos, "finito"

$$R/\ell = z_0 - \text{const} \Rightarrow B(\rho < R, z = z_0) \simeq B_{eje}(z = z_0) \quad (15)$$

Consideremos una espira ubicada a una altura z_j ($z_1 = -\ell/2, z_N = +\ell/2$)



$$z_{j+1} - z_j = \Delta z = \ell/N \quad \forall j \in [1, N] \quad (16)$$

las espiras están equiespaciadas

Entonces el flujo a través de una espira ubicada en una posición z_j es

$$\Phi_j = \Phi^{(1)}(z_j) = \pi R^2 \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \left\{ \frac{(z_j + l/2)}{\sqrt{R^2 + (z_j + l/2)^2}} - \frac{(z_j - l/2)}{\sqrt{R^2 + (z_j - l/2)^2}} \right\} \quad (17)$$

El flujo total a través de todo el solenoide es

$$\Phi = \sum_{j=1}^N \Phi_j = \sum_{j=1}^N \Phi^{(1)}(z_j) \frac{\Delta z}{(l/N)} = \frac{N}{l} \underbrace{\sum_{j=1}^N \Phi^{(1)}(z_j) \Delta z}_{\text{suma de Riemann}} \quad (18)$$

si el espaciado entre espiras tiende a cero $\Delta z \rightarrow 0$ (el devanado es muy denso) la suma anterior tiende a la integral.

$$\Phi = n \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\mu_0 n I}{2} \left\{ \frac{(z + l/2)}{\sqrt{R^2 + (z + l/2)^2}} - \frac{(z - l/2)}{\sqrt{R^2 + (z - l/2)^2}} \right\} dz \quad (19)$$

La primitiva que necesitan para hacer la cuenta es

$$\int \frac{(z \pm \alpha)}{\sqrt{R^2 + (z \pm \alpha)^2}} dz = \sqrt{R^2 + (z \pm \alpha)^2} + \text{const} \quad (20)$$

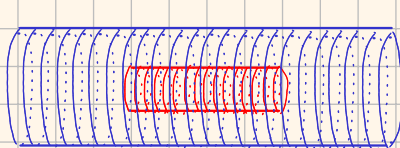
... cuentas ...

$$\Phi = \mu_0 n^2 \pi R^2 (\sqrt{R^2 + l^2} - R) I \quad (21)$$

$$\Rightarrow L = \mu_0 n^2 \pi R^2 (\sqrt{R^2 + l^2} - R) \quad (22)$$

Comprobar que en el límite $l \rightarrow \infty$ se recupera el resultado del solenoide ∞ (hay que hacer un desarrollo de Taylor). (11)

● Ejemplo de cálculo de inductancia mutua



Solenoides chico n_1, l_1, a, I

Solenoides grande n_2, l_2, b

Si por el solenoide 1 circula una corriente I , cuál es el flujo a través del solenoide 2?

Podemos aprovechar la simetría del coeficiente de inducción mútua para calcular el flujo a través del solenoide 1 del campo debido al solenoide 2.

$$M = M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (5)$$

Haciendo la aproximación de que el solenoide grande es infinito $\Rightarrow B_2 = \mu_0 n_2 I$

El flujo a través de una sola espira del solenoide chico es $\Phi^{(1)} = \pi a^2 B_2 = \mu_0 n_2 I \pi a^2$

El solenoide 1 tiene $N_1 = n_1 l_1$ vueltas, por lo tanto, el flujo total a través del mismo es

$$\Phi = \mu_0 n_1 n_2 \pi a^2 l I \Rightarrow M = \mu_0 n_1 n_2 \pi a^2 l$$

● Energía de un sistema magnetostático

Queremos establecer una corriente I en un circuito y para ello vamos a tener que realizar un cierto trabajo ya que, como vimos, por la ley de Faraday, si un circuito tiene una autoinductancia L entonces se genera una fem que se opone a este cambio

$$\mathcal{E}_{ind} = -L \frac{dI}{dt} \quad (8)$$

El trabajo exterior que debemos realizar en contra de esta fem por unidad de carga a lo largo de todo el circuito es $W_{ext}/q = -\mathcal{E}_{ind}$. Entonces, el trabajo realizado sobre un diferencial de carga dq es

$$dW_{ext} = -\mathcal{E}_{ind} dq = -\mathcal{E}_{ind} I dt = +L I dI$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ I = \frac{dq}{dt} & (8) \end{matrix}$

Por lo tanto, el trabajo total realizado sobre el circuito para llevar la corriente desde 0 hasta I es

$$W_{ext} = \frac{1}{2} L I^2 \quad (23)$$

Es posible reescribir la expresión anterior de una forma más simpática recordando que

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad + \text{Teo. Stokes}$$

$\left. \begin{matrix} \text{Stokes} \\ \downarrow \end{matrix} \right\} \int_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \stackrel{(7)}{=} L I \Rightarrow W = \frac{1}{2} \int_C \vec{A} \cdot \vec{I} dl \quad (24.1)$

Esta última expresión se puede generalizar fácilmente para corrientes en superficie y en volumen

$$W = \frac{1}{2} \int_S \vec{A} \cdot \vec{K} dS \quad (24.2)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{A} \cdot \vec{J} dV \quad (24.3)$$

La expresión (24.3) se puede volver aún más amigable si utilizamos la ley de Ampère ($\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$) algunas identidades vectoriales y asumiendo que las corrientes están localizadas y decaen lo suficientemente rápido en ∞ (ver Griffiths Sec 7.2.4 pág 328)

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{todo el espacio}} |\vec{B}|^2 dV \quad (25)$$

Esta última expresión es muy similar a la que obtuvimos para el campo eléctrico

$$W_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{todo el espacio}} |\vec{E}|^2 d\tau$$

En el caso de tener medios materiales, vimos que la energía almacenada en un sistema electrostático es

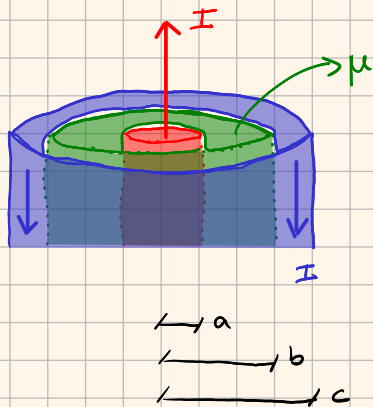
$$W_{\text{dielec}} = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} d\tau$$

No lo vamos a mostrar, pero es posible obtener una expresión análoga para medios magnéticos:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau \quad (26)$$

● Problema 9

Calcular la energía del sistema de la figura y a partir de ésta la autoinductancia.



$$W = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau \quad (26)$$

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \quad (23)$$

En el Problema 14 de la Guía 4 calculamos el campo magnético de un sistema como el de la figura

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\varphi(\rho) \hat{\varphi} \Rightarrow B_\varphi(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho & \rho < a \\ \frac{\mu I}{2\pi \rho} & a < \rho < b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \frac{(c^2 - \rho^2)}{(c^2 - b^2)} & b < \rho < c \\ 0 & \rho > c \end{cases}$$

La integral de la energía se divide en tres partes:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau = \frac{1}{2} \int \frac{B^2}{\mu} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_0^l \frac{B^2(\rho)}{\mu(\rho)} \rho d\rho d\varphi dz$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi l \left\{ \int_0^a \frac{B^2}{\mu_0} \rho d\rho + \int_a^b \frac{B^2}{\mu} \rho d\rho + \int_b^c \frac{B^2}{\mu_0} \rho d\rho \right\}$$

$H = B/\mu$

... cuentas ...

$$(i) : \int_0^a \frac{B^2(\rho)}{\mu_0} \rho d\rho = I^2 \frac{\mu_0}{4\pi^2} \frac{1}{4}$$

$$(ii) : \int_a^b \frac{B^2(\rho)}{\mu} \rho d\rho = I^2 \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a)$$

$$(iii) \int_b^c \frac{B^2(\rho)}{\mu_0} \rho d\rho = I^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{1-b^2/c^2} \left[\frac{1}{1-b^2/c^2} \ln\left(\frac{c^2}{b^2}\right) - 1 \right] - \frac{1}{4} \right\}$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 l I^2}{2\pi} \left\{ \frac{\mu}{\mu_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-b^2/c^2)} \left[\frac{1}{1-b^2/c^2} \ln\left(\frac{c^2}{b^2}\right) - 1 \right] \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \frac{\mu}{\mu_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-b^2/c^2)} \left[\frac{1}{1-b^2/c^2} \ln\left(\frac{c^2}{b^2}\right) - 1 \right] \right\} > 0 \checkmark$$

$c > b$