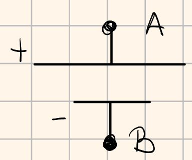
14/06/21 Clase 20: Circuitos de Corriente Variable (Respuesta Transitoria)

Repaso de elementos de circuitos

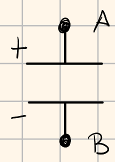
(Refs: Milford, Reitz pág 133, 246; Zangwill pág 283)

FEM (batería)



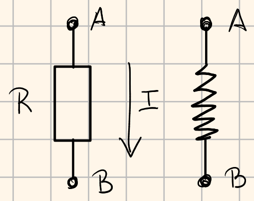
$$V_{AB} = V_A - V_B = \mathcal{E}$$

Capacitor



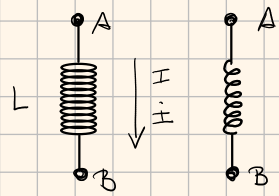
$$V_A - V_B = \frac{Q}{C}$$

Resistencia



$$V_A - V_B = RI$$

Inductancia



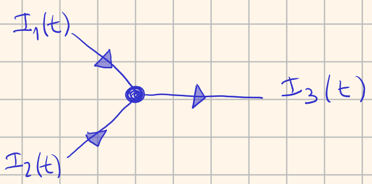
$$V_A - V_B = L\dot{I}$$

Leyes de Kirchoff

1) La suma algebráica de las corrientes (instantáneas) en un nodo es cero.

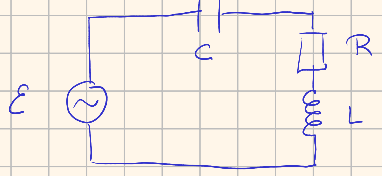
2) En un camino cerrado (malla) la suma algebráica de las fem es igual a la suma de las caídas de potencial.

1)



$$\rightsquigarrow \quad I_1(t) + I_2(t) = I_3(t)$$

2)



$$\sum \text{fem} = \sum \Delta V \iff \sum \text{fem} - \sum \Delta V_j = 0$$

$$\mathcal{E}_{total} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \iff \mathcal{E} - \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\mathcal{E}_{total} = \mathcal{E}_{bat} + \mathcal{E}_{ind} = \mathcal{E}(t) - L\dot{I}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{Cap} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{Res} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = Q/C + RI$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{E}(t) - L\dot{I}}_{\sum \text{fem}} = \underbrace{Q/C + RI}_{\sum \Delta V} \iff \underbrace{\mathcal{E}(t)}_{\mathcal{E}} \underbrace{- L\dot{I} - RI - Q/C}_{\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \sum' \Delta V} = 0$$

↳ incluyendo inductancia

Teniendo en cuenta que $I = \dot{Q}$ (Q indica la carga en la placa positiva del capacitor) podemos reescribir la ecuación diferencial del circuito como

$$\ddot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{1}{CL}Q(t) = \frac{\varepsilon(t)}{L} \qquad (1)$$

La ecuación diferencial (1) es idéntica a la de un oscilador armónico amortiguado y forzado (como en F1)

$$\ddot{x}(t) + 2\Gamma\dot{x}(t) + \omega_o^2 x(t) = f(t) \qquad (2)$$

si hacemos las siguientes identificaciones:

$$\Gamma \equiv \frac{1}{2}\frac{R}{L}, \quad \omega_o^2 \equiv \frac{1}{CL}, \quad f(t) = \frac{\varepsilon(t)}{L}, \quad x(t) \equiv Q(t) \qquad (3)$$

- Unidades: [R] = Ω = Volt/A, [L] = H = Ω·seg = Volt·seg/A, [C] = Farad = A·seg/Volt = seg/Ω

▶ ***Repaso de resolución de ecuaciones diferenciales***

La solución más general a (2) se compone de una parte homogenéa y otra particular:

$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t) \qquad (4)$$

donde $Q_h(t)$ es solución de la ecuación homogénea

$$\ddot{Q} + 2\Gamma\dot{Q} + \omega_o^2 Q = 0 \qquad (5)$$

y $Q_p(t)$ es una solución de la ecuación completa (2).

- *Solución homogénea*

Propuesta $\quad Q_h(t) = \mathcal{A}\, e^{\lambda t} \quad (6)$ $\quad \lambda$ queda fijado a partir de la ecuación diferencial

$\mathcal{A}$ se fija con las condiciones iniciales

$$\dot{Q}_h = \lambda \mathcal{A} e^{\lambda t}, \quad \ddot{Q}_h = \lambda^2 \mathcal{A} e^{\lambda t}$$

reemplazando en (5) tenemos que

$$(\lambda^2 + 2\Gamma\lambda + \omega_o^2)\mathcal{A} e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\Gamma\lambda + \omega_o^2 = 0 \qquad (7)$$

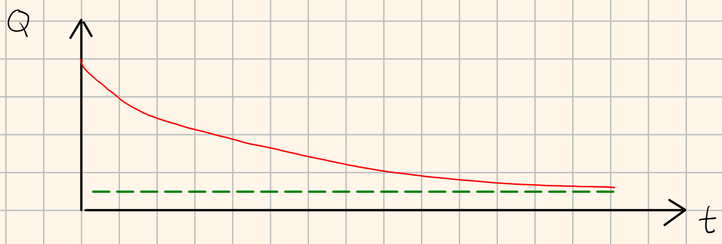
$$\Rightarrow \lambda_\pm = -\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - \omega_o^2} = -\frac{1}{2}\frac{R}{L} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}} \qquad (8)$$

La solución (8) va a presentar distintos comportamiento según el discriminante de la raiz sea positivo, negativo o cero.

- *Caso sobreamortiguado* $\quad \Gamma^2 - \omega_o^2 > 0 \Leftrightarrow R > 2\sqrt{L/C}$

$\Rightarrow \lambda_\pm \in \mathbb{R}, \quad \lambda_+ \neq \lambda_- \Rightarrow$ tenemos dos soluciones linealmente independientes

$$Q_h^{(\text{sobre})}(t) = \mathcal{A}_1 e^{\lambda_+ t} + \mathcal{A}_2 e^{\lambda_- t} \qquad (9)$$



- *Caso subamortiguado* $\quad \Gamma^2 - \omega_0^2 < 0 \iff R < 2\sqrt{L/C}$

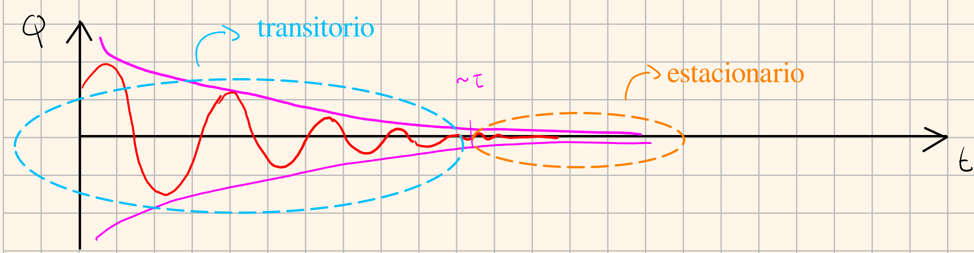
Notemos que $\quad \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} \notin \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{|\Gamma^2 - \omega_0^2|} \equiv i\,\omega$

$$\Rightarrow \quad \lambda_\pm \in \mathbb{C} \qquad \lambda_\pm^{(\text{sub})} = -\Gamma \pm i\omega \qquad (10)$$

$$\Rightarrow \quad Q_h^{(\text{sub})}(t) = \tilde{\mathcal{A}}_1 e^{-\Gamma t + i\omega t} + \tilde{\mathcal{A}}_2 e^{-\Gamma t - i\omega t} \qquad (11)$$

Desde luego queremos soluciones reales. Entonces tomamos parte real y parte imaginaria* de (11)

$$\begin{aligned} Q_h^{(\text{sub})}(t) &= \mathcal{A}_1 e^{-\Gamma t} \cos(\omega t) + \mathcal{A}_2 e^{-\Gamma t} \sin(\omega t) \\ &= \mathcal{A}_3 e^{-\Gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \mathcal{A}_4 e^{-\Gamma t} \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \qquad (12)$$



P/ $t \sim \tau \quad e^{-1} \simeq 0{,}37$

P/ $t \sim 10\tau \quad e^{-10} \simeq 4{,}5 \times 10^{-5}$

- *Caso crítico* $\quad \Gamma^2 - \omega_0^2 = 0 \iff R = 2\sqrt{L/C}$

$$\Rightarrow \quad \lambda_+ = \lambda_- = -\Gamma \in \mathbb{R}$$

(5) es una ecuación diferencial de segundo orden y necesitamos dos soluciones linealmente independientes.

Podemos probar con

$$Q_h(t) = \tilde{\mathcal{A}}\, t\, e^{-\Gamma t} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_h = \tilde{\mathcal{A}}(1 - \Gamma t) e^{-\Gamma t}$$

$$\ddot{Q}_h = \tilde{\mathcal{A}}\,\Gamma(\Gamma t - 1) e^{-\Gamma t}$$

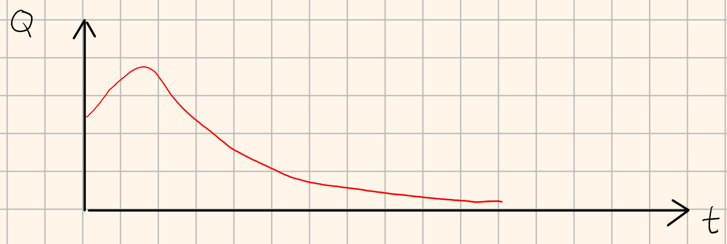
La propuesta resuelve la ecuación homogenea (5).

---

* Fórmula de Euler $\quad e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x \quad x \in \mathbb{R}$

La solución general en el caso crítico es

$$Q_h^{(crit)}(t) = \mathcal{A}_1\, e^{-\Gamma t} + \mathcal{A}_2\, t\, e^{-\Gamma t} \qquad (13)$$

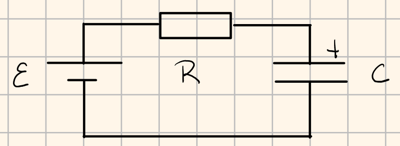


- *Solución particular*

Cualquier solución que resuelva (2). Su forma funcional va a depender de ε(t). Una propuesta que suele funcionar es imitar la forma del término inhomogéneo.

▶ *Casos particulares*

- *Circuito RC*



Ley de Kirchoff (voltajes) $\quad \mathcal{E} = \frac{Q}{C} + RI \,, \quad I = \dot{Q}$

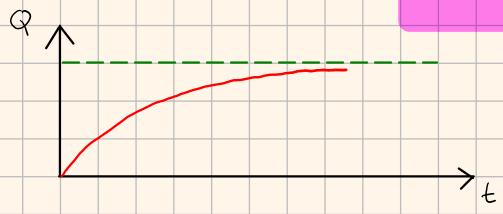
$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}/R = Q/_{RC} + \dot{Q}$$

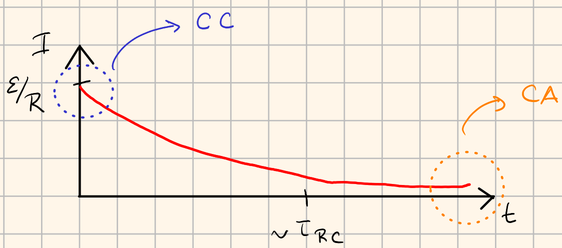
Es conveniente definir $\quad \tau_{RC} \equiv RC$

$$Q(t) = \overbrace{C\mathcal{E}}^{q_p} + (Q_0 - \mathcal{E}C)\, e^{-t/\tau_{RC}} \,, \quad \text{cond. inicial } Q(0) = Q_0$$

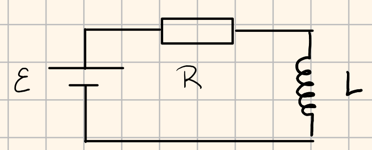
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}C - Q_0}{\tau_{RC}}\, e^{-t/\tau_{RC}}$$

Si $Q_0 = 0$





- *Circuito RL*



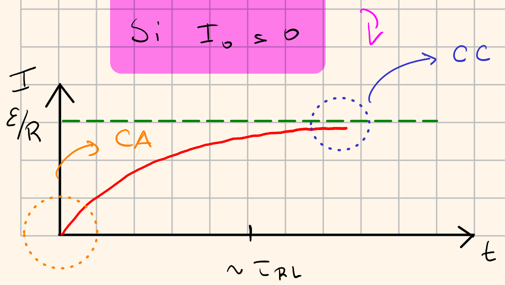
Ley de Kirchoff (voltajes) $\quad \mathcal{E} + \mathcal{E}_{ind} = \mathcal{E} - L\dot{I} = RI$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}/L = R/L\, I + \dot{I}$$

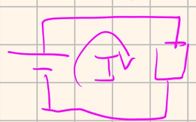
Es conveniente definir $\quad \tau_{RL} \equiv R/L$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} + \left(I_0 - \frac{\mathcal{E}}{R}\right) e^{-t/\tau_{RL}} \,, \quad I(t=0) = I_0$$

Si $I_0 = 0$



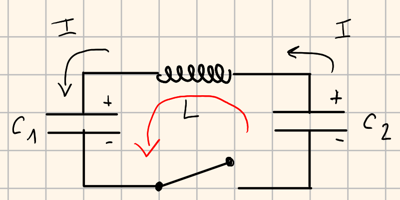
$t \gg \tau_{RL}$



$t \to \infty$

$\mathcal{E} = RI \quad \Rightarrow I = \mathcal{E}/R$

Problema 2



A t=0 el capacitor 1 está descargado y el capacitor 2 está descargado. Las condiciones iniciales para la ecuación diferencial son

$$Q_1(0) = 0 \,, \quad Q_2(0) = Q_0 > 0 \qquad (2.1)$$

Definimos la corriente como

$$I = \dot{Q}_1 \,, \quad I(0) = \dot{Q}_1(0) = 0 \qquad (2.2)$$

ya que el capacitor 1 es el que se está cargando.

Cuando se cierre la llave la carga va a empezar a fluir desde el capacitor 2 al 1 a través de la inductancia.

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}_{ind} = -L\dot{I} = \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} \quad \Leftrightarrow \quad L\dot{I} + \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} = 0 \qquad (2.3)$$

$$\frac{Q_2}{C_2} + L\dot{I} - \frac{Q_1}{C_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L\ddot{Q}_1 + \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} = 0$$

Notemos que la carga total del sistema es

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = Q_0 - Q_1 \qquad (2.4)$$

Reemplazando este vínculo en la ecuación (2.3) tenemos que

$$L\ddot{Q}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) Q_1 - \frac{Q_0}{C_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{Q}_1 + \frac{1}{LC_{eq}} Q_1 = \frac{Q_0}{LC_2} \,, \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad (2.5)$$

- *Solución homogénea*

$$Q_{1h}(t) = \mathcal{A}\cos(\omega t) + \mathcal{B}\sin(\omega t)$$

$$\dot{Q}_{1h}(t) = -\omega\left(\mathcal{A}\sin(\omega t) - \mathcal{B}\cos(\omega t)\right)$$

$$\ddot{Q}_{1h}(t) = -\omega^2\left(\mathcal{A}\cos(\omega t) + \mathcal{B}\sin(\omega t)\right)$$

reemplazando en la ecuación diferencial (2.5)

$$\left(-\omega^2 + \frac{1}{LC_{eq}}\right)\left(\mathcal{A}\cos\omega t + \mathcal{B}\sin(\omega t)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{1}{LC_{eq}} \qquad (2.6)$$

- *Solución particular*

$$Q_{1p} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{LC_{eq}} Q_{1p} = \frac{Q_0}{LC_2} \quad \Rightarrow \quad Q_{1p} = \frac{C_{eq}}{C_2} Q_0 \qquad (2.7)$$

Ahora sí podemos imponer las condiciones iniciales (2.1)

$$Q_1(t) = \mathcal{A}\cos(\omega t) + \mathcal{B}\sin(\omega t) + \frac{C_{eq}}{C_2}Q_0 \quad , \quad Q_1(0) = 0 \quad , \quad \dot{Q}_1(0) = I(0) = 0$$

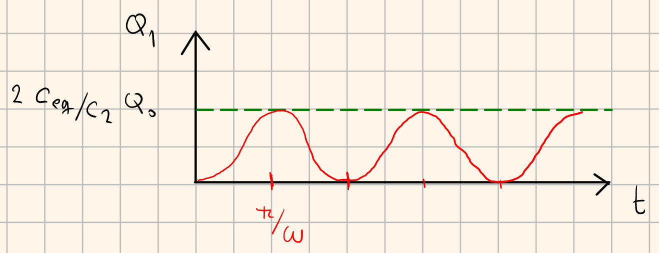
$$\dot{Q}_1(0) = 0 = \omega \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} = 0$$

$$Q_1(0) = 0 = \mathcal{A} + \frac{C_{eq}}{C_2}Q_0 \Rightarrow \mathcal{A} = -\frac{C_{eq}}{C_2}Q_0$$

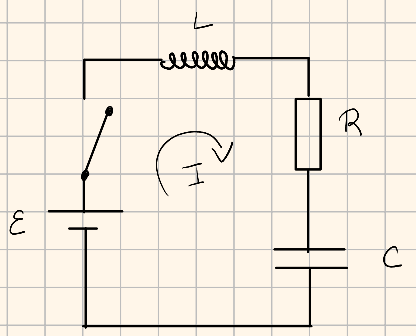
$$\Rightarrow \boxed{Q_1(t) = \frac{C_{eq}}{C_2}Q_0\left(1 - \cos(\omega t)\right)} \quad (2.8)$$

$$Q_0 = Q_x + Q_2$$

$$Q_2 = Q_0 - Q_x$$



▶ *Problema 4*



Datos: ε = 400V, L = 2H, R = 20Ω, C = 8μF

Utilizando la ley de Kirchoff de voltajes

$$\mathcal{E} = \frac{1}{C}Q + RI + L\dot{I}$$

$$I = \dot{Q} \qquad Q = \mathcal{A}e^{+\lambda t}$$

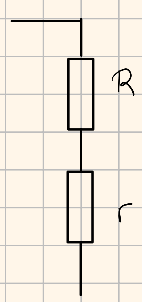
$$\Rightarrow \ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{CL}Q = \frac{\mathcal{E}}{L} = \text{const} \quad (4.1)$$

Ya vimos cómo resolver este problema, lo que debemos chequear es si el discriminante es positivo, negativo o cero.

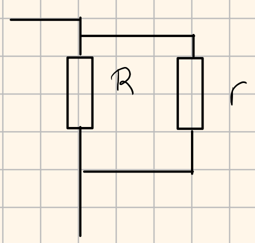
$$\lambda_\pm = -\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} \quad , \quad \Gamma = \frac{1}{2}\frac{R}{L} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{1}{CL}$$

$$Q_h(t) = \mathcal{A}_1 e^{\lambda_+ t} + \mathcal{A}_2 e^{\lambda_- t} \quad , \quad Q_p = \text{const}$$

Cómo obtener un comportamiento crítico añadiendo una resistencia?



ó



?

$$\Gamma'^2 - \omega_0^2 = 0 \quad \text{con} \quad \Gamma' = \frac{R_{eq}}{L}$$