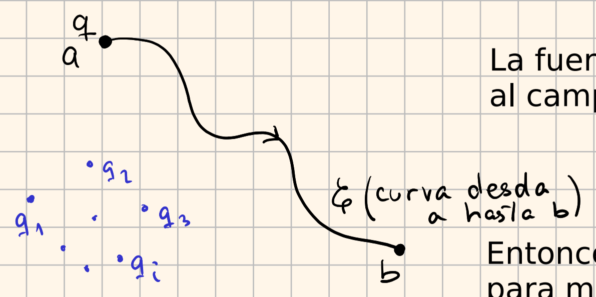
# Energía y Trabajo en Sistemas Electrostáticos

*Refs: Griffiths, Sec 2.4 y 4.1*

## *Trabajo necesario para mover una carga*

Lo que queremos averiguar es cuanto trabajo debemos realizar para mover una carga desde un punto a hasta un punto b en presencia de un campo eléctrico externo (por ejemplo el generado por un sistema de cargas)




La fuerza que siente un carga de prueba q debido al campo externo $\vec{E}$ es

$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

Entonces la fuerza mecánica que debemos realizar para mover la carga es

$$\vec{F}_{mec} = -\vec{F} = -q\,\vec{E}$$

Entonces el trabajo mecánico relizado para llevar la carga de prueba q desde a hasta b es

$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_a^b (-q\vec{E})\cdot d\vec{\ell} \underset{\vec{E}=-\vec{\nabla}V}{=} +q\int_a^b (\vec{\nabla}V)\cdot d\vec{\ell}$$

$$W \underset{\text{por regla de la cadena } dV=(\vec{\nabla}V)\cdot d\vec{\ell}}{=} q\int_a^b dV = \boxed{q\big(V(b)-V(a)\big) = W} \qquad (0)$$

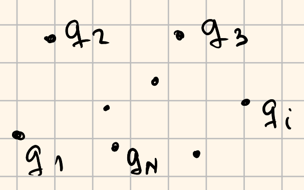
notar que esta expresión es independiente del camino (el campo electrostático es conservativo rot $\vec{E}$ = 0 )

La diferencia de potencial entre los puntos a y b es igual al trabajo por unidad de carga necesario para mover una carga de prueba entre dichos puntos.

En el caso de lidiar con una distribución de cargas localizada en el espacio es posible fijar el potencial en infinito a cero $V(\infty)=0$

$$\boxed{W = q\,V(\vec{r})} \qquad (1)$$

## *Energía de un sistema de cargas puntuales*



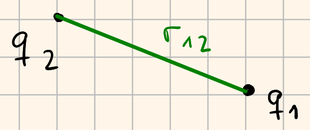

Cuánto trabajo se necesita para "construir" una configuración de cargas puntuales?
El procedimiento va a consistir en traer las cargas "desde infinito" una por una de manera cuasi-estática (en cada instante de tiempo se puede pensar que la configuración es electrostática).

Consideremos el caso N=4

Traer la primer carga no nos cuesta ningún trabajo ya que no hay ningún campo electrostático contra el cual "luchar". Cuando la primer carga llega a su posición final la "clavamos" para que no se mueva.

Para traer la segunda carga es necesario realizar trabajo mecánico en contra del campo electrostático generado por la primer carga. Recurriendo a la expresión (1) el trabajo que realizamos para llevar $q_2$ hasta su posición final es

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{12}}\right)$$




$$r_{12} \equiv |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

Análogamente, el trabajo necesario para traer una tercer carga es

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{r_{31}} + \frac{q_2}{r_{32}}\right)$$

ya que debemos "luchar" contra el campo de las cargas $q_1$ y $q_2$

Por último, el trabajo necesario para traer la cuarta y última carga es

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_4 \left(\frac{q_1}{r_{41}} + \frac{q_2}{r_{42}} + \frac{q_3}{r_{43}}\right)$$

Sumando $W_2$, $W_3$ y $W_4$ obtenemos el trabajo total requerido en construir una configuración de cuatro cargas

$$W = W_2 + W_3 + W_4$$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}}\right)$$

donde utilizamos la simetría $r_{ij} = r_{ji}$ y reacomodamos los términos de una forma que nos permitirá generalizar el resultado para una configuración de N cargas.

El trabajo que requiere construir un sistema de N cargas puntuales es

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad , \quad r_{ij} \equiv |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

Una forma conveniente de reescribir la expresión anterior es

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad (2)$$

donde el factor 1/2 evita que contemos dos veces el mismo término.

Obs: Notemos que hay UN término por cada interacción entre pares de cargas.

Luego de mirar fijo un rato la ecuación (2) nos damos cuenta que

$$V(\bar{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_j}{r_{ij}}$$

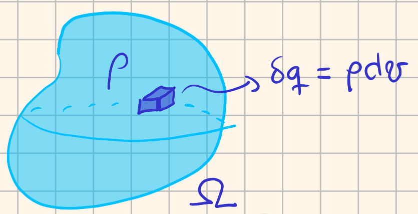
es la expresión del potencial de las (N-1) en el punto $\vec{r}_i$ (el lugar donde está la carga $q_i$) lo que nos permite escribir

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V(\bar{r}_i)} \qquad (3)$$

Obs: esta deducción no tiene en cuanta las auto-energías de cada una de las partículas.
Obs: W es la energía interna del sistema (la energía que costó construirlo y la que en principio sería posible obtener al desarmarlo).

## Energía de una distribución contínua de cargas

La generalización de (3) al caso de distribuciones de carga contínuas es trivial. Basta considerar una distribución de cargas en volumen



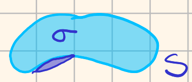

potencial eléctrico

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\bar{r}')\, V(\bar{r}')\, dv'} \qquad (4)$$

donde Ω es la región donde está ubicada la distrubicón de carga ρ y dυ es el diferencial de volumen.

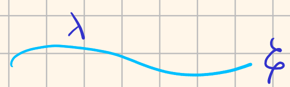
Para una distribución de cargas en superficie

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int_{S} \sigma(\bar{r}')\, V(\bar{r}')\, ds'} \qquad (4')$$




y para una distribución de cargas lineal

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int_{\xi} \lambda(\bar{r}')\, V(\bar{r}')\, d\ell} \qquad (4'')$$




Utilizando la ley de Gauss es posible expresar (4) en términos del campo eléctrico

$$\rho = \varepsilon_0 \bar{\nabla}\cdot\bar{E}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\bar{\nabla}\cdot\bar{E})\, V\, dv$$

y haciendo partes

$$\bar{\nabla}\cdot(V\bar{E}) = (\bar{\nabla}V)\cdot\bar{E} + (\bar{\nabla}\cdot\vec{E})\, V$$

tenemos que

$$W = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} \varepsilon_0 \underbrace{(\vec\nabla V)}^{=-\vec E}\cdot \vec E \, dv + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\Omega} \varepsilon_0 \vec\nabla\cdot(V\vec E)\, dv}$$

$$= \oint_{S=\partial\Omega} \varepsilon_0 V\vec E\cdot d\vec s \quad \text{(teorema de la divergencia)}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{ \int_{\Omega} |\vec E|^2 dv + \oint_{S=\partial\Omega} V\vec E\cdot d\vec s \right\}} \qquad (5)$$

Es intersante observar que el primer término es definido positivo ya que $|\vec E|>0$

Recordando la expresión de la cual partimos $W = 1/2 \int_{\Omega} \rho V dv$

podemos notar que en realidad cualquier volumen de integración que tomemos es igualmente bueno mientras contenga a la distribución de carga ($\rho=0$ fuera de la distribución). Podemos tomar, por ejemplo, $\Omega$ = TODO EL ESPACIO. En este caso el término de superficie tiende a cero ya que

$$V \sim 1/r, \quad E \sim 1/r^2, \quad ds \sim r^2$$

Entonces, si tenemos una distribución de carga localizada en el espacio podemos escribir la siguiente expresión para la energía electrostática de un sistema

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\substack{\text{todo el}\\ \text{espacio}}} |\vec E|^2 dv} \qquad (6)$$

⚠ Observación: la expresión (6) tiene cuenta la ENERGIA TOTAL del sistema, al contrario de (3) para cargas puntuales. Esto se debe a que, en la expresión (3), $V(r_i)$ representa el potencial debido a todas las cargas excepto la carga $q_i$, mientras que en (6) el V(r) representa el de toda la distribución (notar que por más chico que sea un elemento de volumen conteniendo carga éste no diverje y está bien definido, cosa que no sucede para una carga puntual).

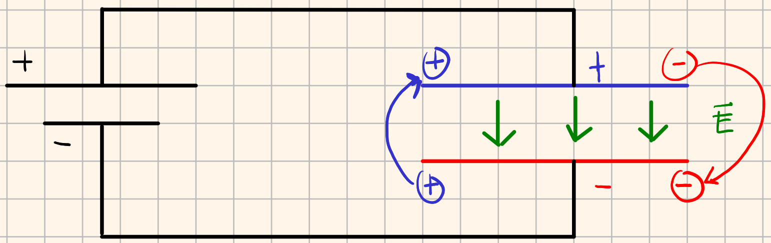
⚠ Observación: el principio de superposición NO vale para la energía!!! La expresión (6) es cuadrática en el campo eléctrico, no es lineal. La energía de un sistema compuesto es "más" que la suma de energía de cada uno de sus componentes:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int |\vec E|^2 dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \underbrace{(\vec E_1 + \vec E_2)}_{= |\vec E_1|^2 + |\vec E_2|^2 + 2\vec E_1\cdot\vec E_2} dv$$

$$W = W_1 + W_2 + \varepsilon_0 \int \vec E_1\cdot\vec E_2 \, dv$$

## Energía necesaria para cargar un capacitor

Para cargar un capacitor necesitamos sacar electrones de la placa positiva y llevarlas a la placa negativa del capacitor (flecha azul); o lo que es lo mismo remover iones positivos de la placa negativa y llevarlos a la placa positiva (flecha roja). Este proceso requiere trabajo (realizado por la batería) ya que a medida que se carga la placa negativa el campo eléctrico que se genera se opone a dicho procedimiento.




De la expresión (0) sabemos que el trabajo necesario para mover una carga de un punto a hasta un punto es proporcional a la diferencia de potencial existente entre dichos puntos, es decir,

$$W = q\,(V_b - V_a) = q\,\Delta V_{ba}$$

Consideremos un instante intermedio en el proceso de carga en el cual se ha acumulado una carga q>0 en la placa positiva. La diferencia de potencial es ΔV = q/C. Utilizando la ecuación (0) el trabajo requerido para mover un diferencial de carga dq es

$$dW = dq\,\Delta V_{ba} = dq\,(q/C) = dW$$

Entonces, en todo el proceso de carga el trabajo total es

$$\boxed{W = \int_0^Q (q/C)\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}} \qquad (7)$$

Otra forma de escribir (7) es

$$\boxed{W = \frac{1}{2} C V^2} \qquad (7')$$

donde utilizamos la relación válida para capacitores Q = C V

Si reemplazamos q = C V en el diferencial de trabajo dW tenemos que

$$dW = d(CV)\frac{q}{C} = dV\,q \underset{q=CV}{=} CV\,dV$$

integrando el diferencial de trabajo desde V=0 hasta V tenemos que el trabajo total para que las placas del capactiro estén a una diferencia de potencial V es

$$\boxed{W = \int_0^V CV\,dV = \frac{1}{2} C V^2} \qquad (7'')$$

## Energía de sistemas dieléctricos

Consideremos primero el caso de un capacitor de placas paralelas (despreciaremos los efectos de borde). Para cargarlo iremos colocando poco a poco cargas libres positivas en la placa positiva lo que inducirá cargas de polarización en el material dieléctrico y a su vez cargará negativamente la placa inferior.

Supongamos en un un instante intermedio del proceso de carga la diferencia de potencial entre las placas es V. El diferencial de trabajo requerido para colocar un diferencial de carga libre $dq_\ell$ es

$$dW = dq_\ell V \quad \Rightarrow \quad W = \int_0^{Q_\ell} V\, dq_\ell$$

Notemos que V depende de la carga libre $\quad V = q_\ell / C$

$$\Rightarrow \quad W = \int_0^{Q_\ell} \frac{q_\ell}{C}\, dq_\ell = \frac{1}{2C} Q_\ell^2$$

recordando que la capacidad de un capacitor de caras paralelas relleno con un material de permitividad ε es

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

área de la placa

separación entre placas

tenemos que

$$W = \frac{1}{2}\frac{d}{A\varepsilon}(\sigma_\ell A)^2 = \frac{1}{2}\overbrace{Ad}^{\text{Vol}}\,\frac{\sigma_\ell^2}{\varepsilon} \qquad \frac{\sigma_\ell^2}{\varepsilon} = \overbrace{\sigma_\ell}^{D}\,\overbrace{\frac{\sigma_\ell}{\varepsilon}}^{E}$$

$$W = \frac{1}{2}\,\text{Vol}\; E\, D$$

La expresión anterior nos sugiere que la energía de un sistema dieléctrico debe ser

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_\Omega \bar{E}\cdot\bar{D}\, dv} \qquad (8)$$

Ahora que tenemos sabemos a qué debemos llegar procedamos a obtener (8) de una forma más general.

Lo primero que debemos notar es que cuando derivamos (7) para una distrubición contínua de cargas no se tuvo en cuenta la energía que sería necesaria para polarizar un material dieléctrico, por lo cual, dicha expresión no se puede extrapolar al caso de interés.

Empecemos de nuevo y calculemos cual es el trabajo necesario para cargar un sistema en presencia de un material dieléctrico con permitividad ε aumentando poco a poco la cantidad de carga libre (de hecho, la carga libre es la única sobre la que tenemos control)

Nuevamente consideremos un instante intermedio de carga en el cual ya existe un cierto campo eléctrico y un potencial V en el sistema. Entonces, el trabajo necesario para aumentar la carga libre en una cantidad pequeña $\delta\rho_\ell$ es

$$\delta W = \int_\Omega \delta\rho_\ell V \, dv$$

Recordando que

$$\rho_\ell = \bar{\nabla}\cdot\bar{D} \quad \Rightarrow \quad \delta\rho_\ell = \bar{\nabla}\cdot(\delta\bar{D})$$

por lo tanto

$$\delta W = \int_\Omega [\bar{\nabla}\cdot(\delta\bar{D})] V \, dv$$

haciendo integración por partes

$$\bar{\nabla}(V\delta\bar{D}) = (\bar{\nabla}V)\cdot\delta\bar{D} + [\bar{\nabla}\cdot(\delta\bar{D})]V$$

$$\Rightarrow \quad \delta W = -\int_\Omega (\bar{\nabla}V)\cdot\delta\bar{D} \, dv + \int_\Omega \bar{\nabla}\cdot(V\delta\bar{D}) \, dv$$

como antes, utilizando el teorema de la divergencia y que $\bar{E} = -\bar{\nabla}V$

$$\delta W = \int_\Omega \bar{E}\cdot\delta\bar{D} \, dv + \oint_{S=\partial\Omega} V\delta\bar{D}\cdot d\bar{s}$$

Si la distribución de cargas y medio material está localizada en el espacio podemos considerar que la región de integración es todo el espacio y podemos despreciar el término de borde (asumiendo que los campos decaen lo suficientemente rápido en el infinito)

$$\delta W = \int_{\substack{\text{todo el}\\ \text{espacio}}} \bar{E}\cdot\delta\bar{D} \, dv$$

Formalmente, podemos obtener una expresión para el trabajo total

$$\boxed{W = \int_{\substack{\text{todo el}\\ \text{espacio}}} dv \int_0^D \bar{E}\cdot\delta\bar{D}} \qquad (9)$$

La expresión (9) es completamente general ya que no hemos realizado ninguna suposición sobre el material (no impusimos ninguna relación constitutiva).

Si consideramos que el material dieléctrico es lineal

$$\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$$

entonces

$$\frac{1}{2}\,\delta(\bar{D}\cdot\bar{E}) = \frac{1}{2}\,\delta(\varepsilon E^2) = \varepsilon\,\delta\bar{E}\cdot\bar{E} = \delta\bar{D}\cdot\bar{E}$$

y obtenemos que

$$\boxed{W = \int dv \int \frac{1}{2}\,\delta(\bar{D}\cdot\bar{E}) = \frac{1}{2}\int \bar{D}\cdot\bar{E}\,dv}$$

que es justamente la expresión que habíamos intuido al considerar un capacitor relleno con un material dieléctrico lineal.