Clase 2: Potencial eléctrico y Configuraciones de Alta Simetría

25 de marzo de 2021

Clase 2

- Cálculo del Potencial eléctrico
- Dependencia y Dirección del campo en configuraciones de alta simetría

Potencial eléctrico

En la clase teórica vieron que en electrostática:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{1}$$

Y a partir de esta propiedad se puede definir el potencial eléctrico $V(\vec{r})$ de la siguiente manera:

$$V(\vec{r}) = -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.\vec{dl} \tag{2}$$

donde $\vec{r_O}$ es un punto arbitrario.

- Dados V y V', tal que ambos cumplen que -$\vec{\nabla} V = \vec{E}(\vec{r})$, entonces $V = V' + \mathrm{cte}$
- El potencial no tiene sentido físico, mientras que $\Delta V = V(a) - V(b)$ con a y b dos puntos cualquiera si lo tiene.

Por lo tanto, también se puede definir el potencial:

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{E}.\vec{dl} + \mathrm{cte} \tag{3}$$

Potencial eléctrico

El potencial eléctrico para una distribución de cargas en volumen se puede expresar:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dV' + cte \tag{4}$$

Si tenemos una distribución de cargas en superficie:

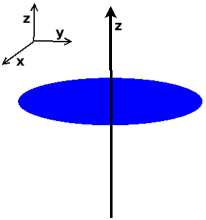
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dS' + cte \tag{5}$$

mientras que si tenemos una distribución lineal de cargas:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dl' + cte \tag{6}$$

Potencial eléctrico por integración directa

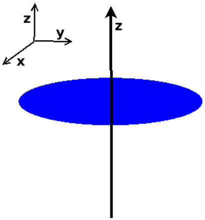
Calcular el potencial eléctrico de un disco de radio R cargado con densidad constante σ sobre el eje z:



Vamos a usar la expresión:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dS' + \mathrm{cte}$$

Calcular el potencial eléctrico de un disco de radio R cargado con densidad constante σ sobre el eje z:



Vamos a usar la expresión:

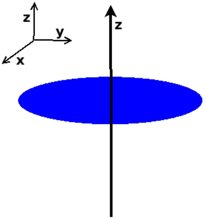
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dS' + \mathrm{cte}$$

Recordemos que
las variables primadas corresponden a los puntos que son fuente del campo y potencial eléctrico:

$$\vec{r'} = (r' \cos\phi', r' \sin\phi', 0)$$

Potencial eléctrico por integración directa

Calcular el potencial eléctrico de un disco de radio R cargado con densidad constante σ sobre el eje z:



Vamos a usar la expresión:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dS' + \mathrm{cte}$$

Recordemos que
las variables primadas corresponden a los puntos que son fuente del campo y potencial eléctrico:

$$\vec{r'} = (r'\cos\phi', r'\sin\phi', 0)$$

mientras que $\vec{r}$ es la posición de los puntos donde queremos calcular el campo, en este caso el eje z, De manera que :

$$\vec{r} = (0,0,z) \quad (\vec{r}-\vec{r'}) = (-r'\cos\phi', -r'\sin\phi', z) \quad |\vec{r}-\vec{r'}| = \sqrt{r'^2+z^2}$$

Potencial eléctrico por integración directa

A su vez:

$$dS' = dx'dy' = r'dr'd\phi'$$

De esta manera, podemos calcular el potencial:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}dS' + cte$$

Potencial eléctrico por integración directa

A su vez:

$$dS' = dx'dy' = r'dr'd\phi'$$

De esta manera, podemos calcular el potencial:

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dS' + cte \\
V(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r'\,dr'\,d\phi'}{\sqrt{r'^2+z^2)}}
\end{aligned}$$

Potencial eléctrico por integración directa

A su vez:

$$dS' = dx'dy' = r'dr'd\phi'$$

De esta manera, podemos calcular el potencial:

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dS' + cte \\
V(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{r'\,dr'\,d\phi'}{\sqrt{r'^2+z^2)}} \\
&= \frac{1}{2\epsilon_0}\int_0^R\frac{r'\,dr'}{\sqrt{r'^2+z^2)}}
\end{aligned}$$

Potencial eléctrico por integración directa

A su vez:

$$dS' = dx'dy' = r'dr'd\phi'$$

De esta manera, podemos calcular el potencial:

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dS' + cte \\
V(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{r'\,dr'\,d\phi'}{\sqrt{r'^2+z^2)}} \\
&= \frac{1}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r'\,dr'}{\sqrt{r'^2+z^2)}} \\
&= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\sqrt{r'^2+z^2}|_0^R + cte
\end{aligned}$$

Potencial eléctrico por integración directa

A su vez:

$$dS' = dx'dy' = r'dr'd\phi'$$

De esta manera, podemos calcular el potencial:

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dS' + cte \\
V(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{r'\,dr'\,d\phi'}{\sqrt{r'^2+z^2)}} \\
&= \frac{1}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r'\,dr'}{\sqrt{r'^2+z^2)}} \\
&= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\sqrt{r'^2+z^2}|_0^R + cte \\
&= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}-|z|\right) \qquad (7)
\end{aligned}$$

Disco de radio R cargado con σ

Podemos calcular el campo en el eje z a partir del $V(0,0,z)$?

DISCO DE RADIO R CARGADO CON σ

Podemos calcular el campo en el eje z a partir del $V(0,0,z)$? La respuesta mas general es NO, porque

$$\vec{E}(0,0,z) = -\nabla V(x,y,z)|_{(0,0,z)} = -(\frac{dV}{dr}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\phi}\hat{\phi} + \frac{dV}{dz}\hat{z})|_{(0,0,z)} \quad (8)$$

Y nosotros calculamos $V(0,0,z)$ y no $V(x,y,z)$.

Disco de radio R cargado con σ

Podemos calcular el campo en el eje z a partir del $V(0,0,z)$? La respuesta mas general es NO, porque

$$\vec{E}(0,0,z) = -\nabla V(x,y,z)|_{(0,0,z)} = -(\frac{dV}{dr}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\phi}\hat{\phi} + \frac{dV}{dz}\hat{z})|_{(0,0,z)} \quad (8)$$

Y nosotros calculamos $V(0,0,z)$ y no $V(x,y,z)$.
Sin embargo, en este caso, por argumentos de simetría (ver clase pasada) sabemos que $\vec{E} = E_z\hat{z}$ y como justamente $E_z = -\frac{dV}{dz}\hat{z}$, en este caso, es válido calcular $\vec{E}(0,0,z) = -\frac{dV(0,0,z)}{dz}\hat{z}$.

Disco de radio R cargado con σ

Podemos calcular el campo en el eje z a partir del $V(0,0,z)$? La respuesta mas general es NO, porque

$$\vec{E}(0,0,z) = -\nabla V(x,y,z)|_{(0,0,z)} = -(\frac{dV}{dr}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\phi}\hat{\phi} + \frac{dV}{dz}\hat{z})|_{(0,0,z)} \quad (8)$$

Y nosotros calculamos $V(0,0,z)$ y no $V(x,y,z)$.
Sin embargo, en este caso, por argumentos de simetría (ver clase pasada) sabemos que $\vec{E} = E_z\hat{z}$ y como justamente $E_z = -\frac{dV}{dz}\hat{z}$, en este caso, es válido calcular $\vec{E}(0,0,z) = -\frac{dV(0,0,z)}{dz}\hat{z}$.
Entonces:

$$\vec{E}(0,0,z) = -\frac{dV(0,0,z)}{dz}$$

Disco de radio R cargado con σ

Podemos calcular el campo en el eje z a partir del $V(0,0,z)$? La respuesta mas general es NO, porque

$$\vec{E}(0{,}0,z) = -\nabla V(x,y,z)|_{(0{,}0,z)} = -(\frac{dV}{dr}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\phi}\hat{\phi} + \frac{dV}{dz}\hat{z})|_{(0{,}0,z)} \quad (8)$$

Y nosotros calculamos $V(0,0,z)$ y no $V(x,y,z)$.
Sin embargo, en este caso, por argumentos de simetría (ver clase pasada) sabemos que $\vec{E} = E_z\hat{z}$ y como justamente $E_z = -\frac{dV}{dz}\hat{z}$, en este caso, es válido calcular $\vec{E}(0,0,z) = -\frac{dV(0{,}0{,}z)}{dz}\hat{z}$.
Entonces:

$$\begin{aligned}\vec{E}(0{,}0,z) &= -\frac{dV(0,0,z)}{dz} \\ &= -\frac{d}{dz}\left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)\right]\end{aligned}$$

Disco de radio R cargado con σ

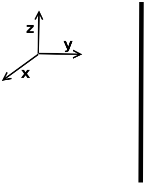
Podemos calcular el campo en el eje z a partir del $V(0,0,z)$? La respuesta mas general es NO, porque

$$\vec{E}(0{,}0,z) = -\nabla V(x,y,z)|_{(0,0,z)} = -(\frac{dV}{dr}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\phi}\hat{\phi} + \frac{dV}{dz}\hat{z})|_{(0,0,z)} \quad (8)$$

Y nosotros calculamos $V(0,0,z)$ y no $V(x,y,z)$.
Sin embargo, en este caso, por argumentos de simetría (ver clase pasada) sabemos que $\vec{E} = E_z\hat{z}$ y como justamente $E_z = -\frac{dV}{dz}\hat{z}$, en este caso, es válido calcular $\vec{E}(0,0,z) = -\frac{dV(0,0,z)}{dz}\hat{z}$.
Entonces:

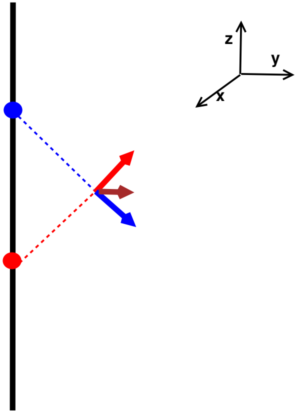
$$\begin{aligned}
\vec{E}(0{,}0,z) &= -\frac{dV(0,0,z)}{dz} \\
&= -\frac{d}{dz}\left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)\right] \\
&= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} + \mathrm{sig}(z)\right) \qquad (9)
\end{aligned}$$

Campo eléctrico de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ



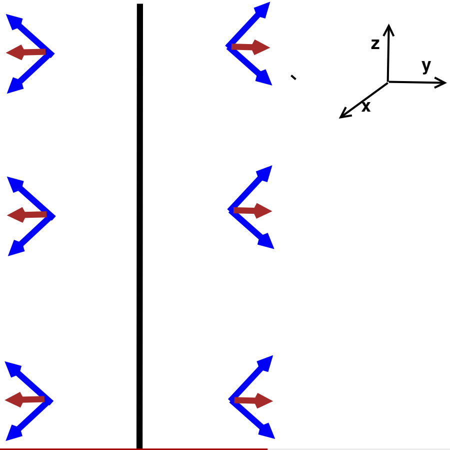
Primero vamos a ver la dependencia del campo. Elijo coordenadas cilíndricas porque me van a facilitar el análisis. Lo primero que tenemos que notar es que para esta configuración de cargas tenemos simetra de rotación alrededor del eje z y de traslación alrededor del eje z. Esto quiere decir que si roto a la configuración de cargas (en este caso el hilo) un ángulo ϕ alrededor del eje z, obtengo la misma configuración de cargas, y lo mismo sucede si traslado la configuración de cargas a lo largo del eje z, ya que al ser un hilo infinito, obtengo otro hilo infinito. Como conclusión de lo anterior, el campo de un hilo infinito sólo va a depender de la coordenada r de coordenadas cilíndricas: $E = E(r)$.

Dirección del campo eléctrico de un hilo infinito cargado con λ



En la figura
se puede ver la dirección de la contribución al campo eléctricos de dos δq (en el dibujo
uno en rojo y el otro en azul) a un punto campo, donde ambos δq estan ubicados a la misma distancia del punto campo.

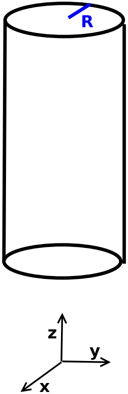
Campo eléctrico de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ



El razonamiento
de la figura anterior
se puede extener a todos
los puntos campo del espacio,
algunos se pueden ver en
la figura. Por lo tanto el campo
eléctrico de un hilo infinito:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

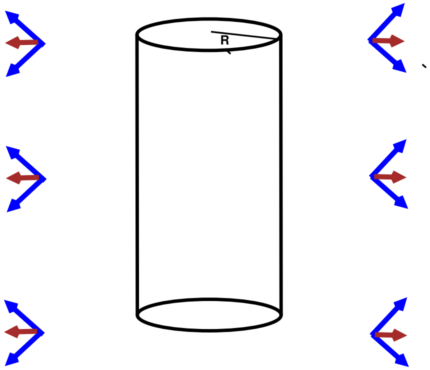
Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R



Nuevamente elegiremos coordenadas cilíndricas para analizar la dependencia del campo. Al igual que en el caso del hilo infinito cargado, para esta configuración de cargas hay simetría de rotación alrededor del eje z y de traslación en el eje z. Por lo tanto:

$$E = E(r)$$

Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad carga uniforme ρ y radio R



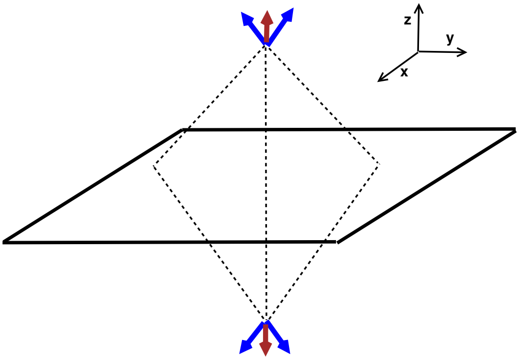
Análogamente
al caso del hilo, se puede ver que:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

donde r y $\hat{r}$
refieren a coordenadas cilíndricas.

Campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga uniforme σ

En primer lugar veamos de qué coordenadas depende el campo y cuál es su dirección.

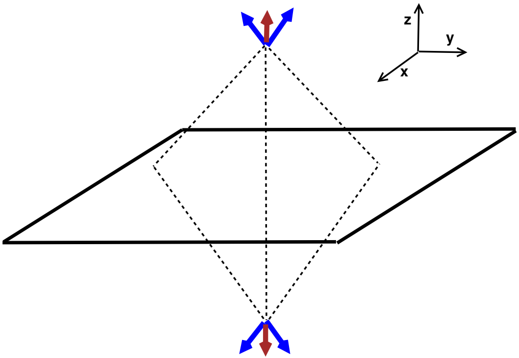


Se puede ver que la configuración de cargas tiene simetría de traslación en los ejes x e y y por lo tanto:

$$E = E(z)$$

Campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga uniforme σ

En primer lugar veamos de qué coordenadas depende el campo y cuál es su dirección.



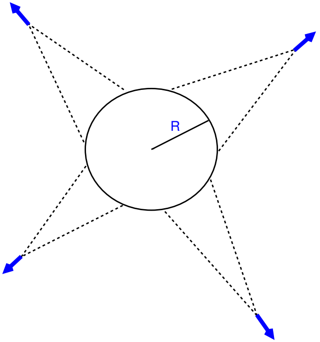
Se puede
ver que la configuración
de cargas tiene
simetría de traslación en los
ejes x e y y por lo tanto:

$$E = E(z)$$

Por otra parte, del dibujo podemos inferir que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} E(z)\hat{z} & z > 0 \\ -E(z)\hat{z} & z < 0 \end{cases}$$

Campo eléctrico de una esfera con densidad de carga uniforme ρ



Del dibujo se puede ver que el campo eléctrico de una esfera:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

donde r y $\hat{r}$ refieren a coordenadas esféricas.