CLASE 3: LEY DE GAUSS

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

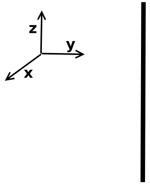
29 de marzo de 2021

Recordemos la Ley de Gauss:

$$\int\int \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

donde la doble integral refiere a una superficie cerrada y Q_{enc} refiere a la carga encerrada por esa superficie. A continuación vamos a resolver el Ejercicio 8 de la guía para lo cual necesitaremos usar consideraciones de simetría para poder saber a priori la dependencia y dirección del campo y luego utilizaremos la ley de Gauss para obtener la expresión exacta del campo.

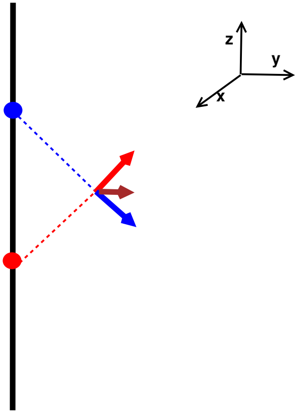
Campo eléctrico de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ



Primero vamos a ver la dependencia del campo. Elijo coordenadas cilíndricas porque me van a facilitar el análisis. Lo primero que tenemos que notar es que para esta configuración de cargas tenemos simetra de rotación alrededor del eje z y de traslación alrededor del eje z. Esto quiere decir que si roto a la configuración de cargas (en este caso el hilo) un ángulo ϕ alrededor del eje z, obtengo la misma configuración de cargas, y lo mismo sucede si traslado la configuración de cargas a lo largo del eje z, ya que al ser un hilo infinito, obtengo otro hilo infinito. Como conclusión de lo anterior, el campo de un hilo infinito sólo va a depender de la coordenada r de coordenadas cilíndricas: $E = E(r)$.

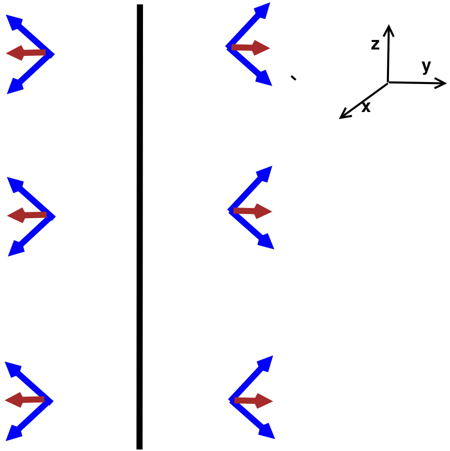
Campo eléctrico de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

Ahora veamos la dirección del campo que siempre será la dirección de $\vec{r} - \vec{r'}$.



En la figura
se puede ver la dirección de la contribución al campo eléctricos de dos δq (en el dibujo uno en rojo y el otro en azul) a un punto campo, donde ambos δq estan ubicados a la misma distancia del punto campo.

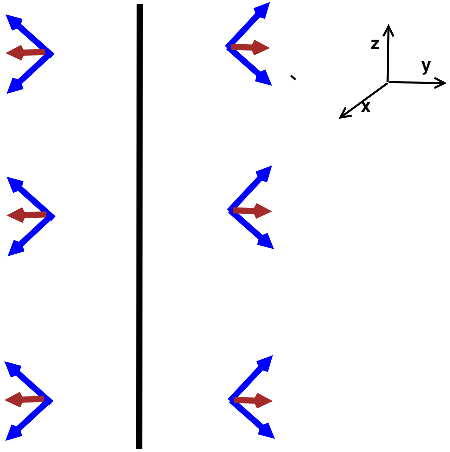
Campo eléctrico de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ



El razonamiento
de la figura anterior
se puede extener a todos
los puntos campo del espacio,
algunos se pueden ver en
la figura. Por lo tanto el campo
eléctrico de un hilo infinito:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

Campo eléctrico de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ



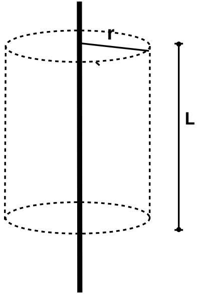
El razonamiento
de la figura anterior
se puede extener a todos
los puntos campo del espacio,
algunos se pueden ver en
la figura. Por lo tanto el campo
eléctrico de un hilo infinito:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

A continuación vamos
a usar la ley de Gauss para
obtener la expresión exacta
del campo eléctrico de un
hilo infinito en todo el espacio.

Campo eléctrico de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

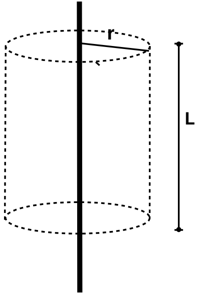
Las superficie de Gauss que vamos a usar para obtener el campo del hilo, es un cilindro de radio r y altura L cuyo eje de simetría coincide con la posición del hilo. La expresión del campo eléctrico $\vec{E}$ NO DEBE DEPENDER DE LOS PARAMETROS DEL CILINDRO ya que es una herramienta auxiliar para realizar el cálculo.



$$\int\int E(r)\hat{r}.d\vec{S} \;=\; \int\int_{\mathrm{TAPA_{SUP}}} E(r)\hat{r}.\hat{z}rdrd\phi +$$

Campo eléctrico de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

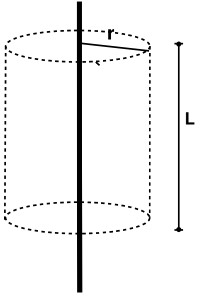
Las superficie de Gauss que vamos a usar para obtener el campo del hilo, es un cilindro de radio r y altura L cuyo eje de simetría coincide con la posición del hilo. La expresión del campo eléctrico $\vec{E}$ NO DEBE DEPENDER DE LOS PARAMETROS DEL CILINDRO ya que es una herramienta auxiliar para realizar el cálculo.



$$\int\int E(r)\hat{r}.d\vec{S} = \int\int_{\mathrm{TAPA_{SUP}}} E(r)\hat{r}.\hat{z}rdrd\phi + \int\int_{\mathrm{TAPA_{INF}}} E(r)\hat{r}.(-\hat{z})rdrd\phi +$$

Campo eléctrico de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

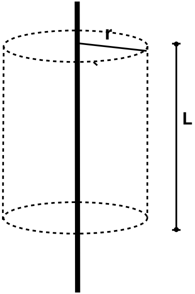
Las superficie de Gauss que vamos a usar para obtener el campo del hilo, es un cilindro de radio r y altura L cuyo eje de simetría coincide con la posición del hilo. La expresión del campo eléctrico $\vec{E}$ NO DEBE DEPENDER DE LOS PARAMETROS DEL CILINDRO ya que es una herramienta auxiliar para realizar el cálculo.



$$\begin{aligned}\int\int E(r)\hat{r}.d\vec{S} &= \int\int_{\mathrm{TAPA}_{\mathrm{SUP}}} E(r)\hat{r}.\hat{z}rdrd\phi + \\ &\int\int_{\mathrm{TAPA}_{\mathrm{INF}}} E(r)\hat{r}.(-\hat{z})rdrd\phi + \\ &\int\int_{\mathrm{PARED}} E(r)\hat{r}.\hat{r}rdzd\phi\end{aligned}$$

Campo eléctrico de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

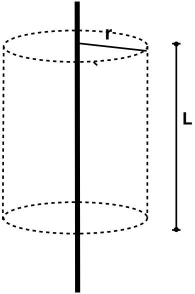
Las superficie de Gauss que vamos a usar para obtener el campo del hilo, es un cilindro de radio r y altura L cuyo eje de simetría coincide con la posición del hilo. La expresión del campo eléctrico $\vec{E}$ NO DEBE DEPENDER DE LOS PARAMETROS DEL CILINDRO ya que es una herramienta auxiliar para realizar el cálculo.



$$\int_{-L/2}^{L/2}\int_{0}^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r}rd\phi dz \quad = \quad \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Campo eléctrico de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

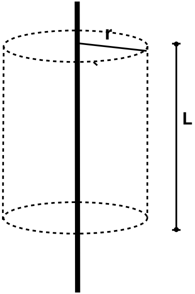
Las superficie de Gauss que vamos a usar para obtener el campo del hilo, es un cilindro de radio r y altura L cuyo eje de simetría coincide con la posición del hilo. La expresión del campo eléctrico $\vec{E}$ NO DEBE DEPENDER DE LOS PARAMETROS DEL CILINDRO ya que es una herramienta auxiliar para realizar el cálculo.



$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r}r d\phi dz &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \\ 2\pi L E(r) r &= \frac{1}{\epsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\lambda dz \end{aligned}$$

Campo eléctrico de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

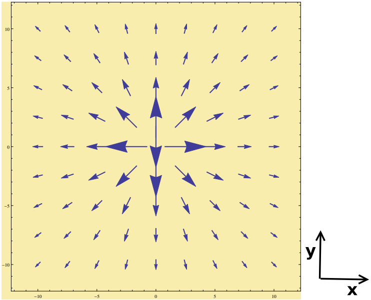
Las superficie de Gauss que vamos a usar para obtener el campo del hilo, es un cilindro de radio r y altura L cuyo eje de simetría coincide con la posición del hilo. La expresión del campo eléctrico $\vec{E}$ NO DEBE DEPENDER DE LOS PARAMETROS DEL CILINDRO ya que es una herramienta auxiliar para realizar el cálculo.



$$\begin{aligned}
\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r}r d\phi dz &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \\
2\pi L E(r) r &= \frac{1}{\epsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\lambda dz \\
2\pi L E(r) r &= \frac{\lambda L}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

Campo eléctrico de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

El campo eléctrico de un hilo infinito se puede expresar:

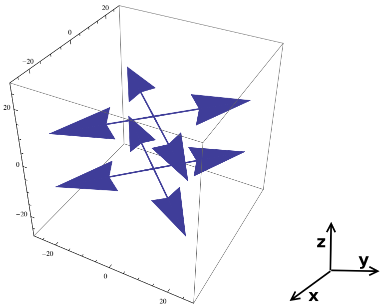


$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$$

En la figura de la izquierda, se muestra el gráfico del campo eléctrico del hilo en el plano xy, es decir, $z = \mathrm{cte}$: un campo con dirección radial y cuya intensidad disminuye con la distancia al centro del hilo.

Campo eléctrio de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

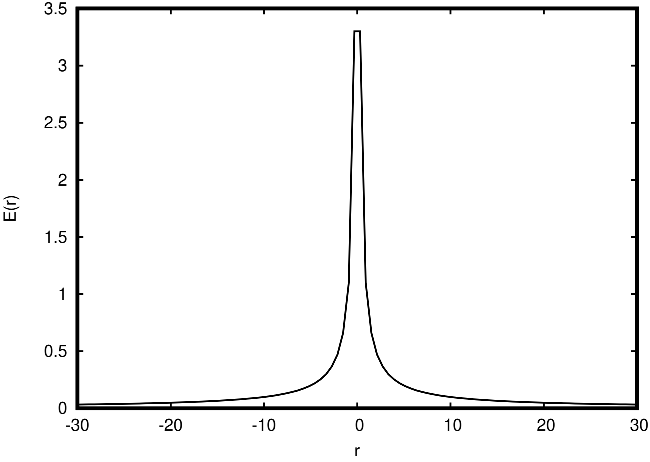
El campo eléctrico de un hilo infinito cargado en todo el espacio:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$$

En la figura de la izquierda, se muestra el gráfico del campo eléctrico del hilo en 3D, para cada plano $z =$cte hay un gráfico igual a la filmina anterior.

Por último, graficamos $E(r)$ en función de r:



Potencial de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

Recordemos que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -(\frac{dV}{dr}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\phi}\hat{\phi} + \frac{dV}{dz}\hat{z})$$

Potencial de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

Recordemos que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -(\frac{dV}{dr}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\phi}\hat{\phi} + \frac{dV}{dz}\hat{z})$$

En este caso:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$$

Potencial de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

Por lo tanto:

$$V(\vec{r}) = -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_x, E_y, E_z) . (dx, dy, dz)$$

Potencial de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_x, E_y, E_z) \,.\, (dx, dy, dz) \\
&= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_r\hat{r} + E_\phi\hat{\phi} + E_z\hat{z}) \,.\, (dr\hat{r} + d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z})
\end{aligned}
$$

Potencial de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_x, E_y, E_z) \, . \, (dx, dy, dz) \\ &= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_r\hat{r} + E_\phi\hat{\phi} + E_z\hat{z}) \, . \, (dr\hat{r} + d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}) \\ &= -\int_{r_O}^{r} \frac{dV}{dr}\hat{r}.\hat{r}dr \end{aligned}$$

Potencial de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_x, E_y, E_z)\,.\,(dx, dy, dz) \\
&= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_r\hat{r} + E_\phi\hat{\phi} + E_z\hat{z})\,.\,(dr\hat{r} + d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}) \\
&= -\int_{r_O}^{r} \frac{dV}{dr}\hat{r}.\hat{r}dr \\
&= -\int_{r_O}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr
\end{aligned}$$

Potencial de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

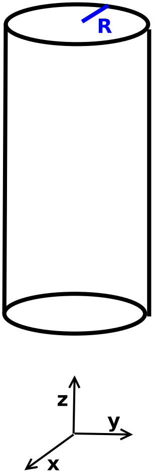
Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_x, E_y, E_z) . (dx, dy, dz) \\
&= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_r\hat{r} + E_\phi\hat{\phi} + E_z\hat{z}) . (dr\hat{r} + d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}) \\
&= -\int_{r_O}^{r} \frac{dV}{dr}\hat{r}.\hat{r}dr \\
&= -\int_{r_O}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr \\
&= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}(\ln r - \ln r_O)
\end{aligned}$$

donde puede elegir arbirtrariamente r_O.

LAS SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES SON CILINDROS DE RADIO r

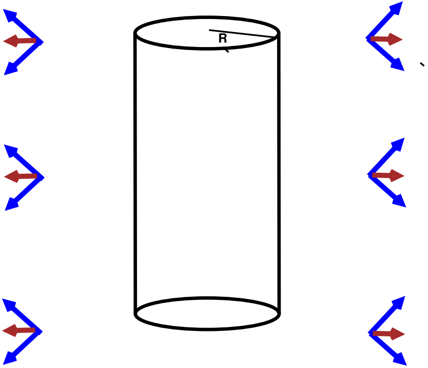
Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R



Nuevamente elegiremos coordenadas cilíndricas para analizar la dependencia del campo. Al igual que en el caso del hilo infinito cargado, para esta configuración de cargas hay simetría de rotación alrededor del eje z y de traslación en el eje z. Por lo tanto:

$$E = E(r)$$

Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad carga uniforme ρ y radio R

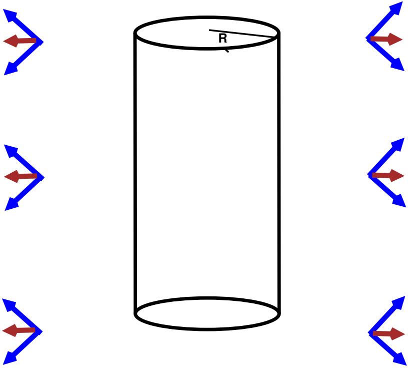


Análogamente
al caso del hilo, se puede ver que:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

donde r y $\hat{r}$
refieren a coordenadas cilíndricas.

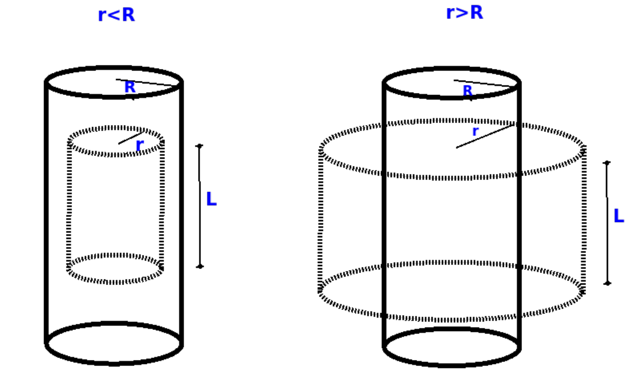
Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad carga uniforme ρ y radio R



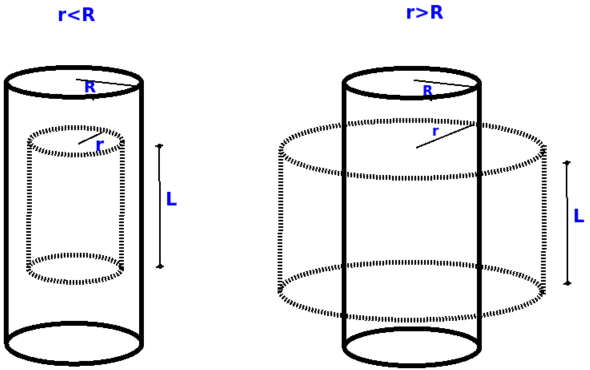
Análogamente
al caso del hilo, se puede ver que:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

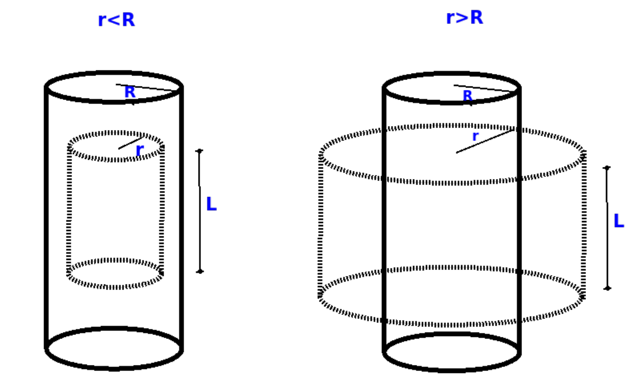
donde r y $\hat{r}$
refieren a coordenadas cilíndricas.
Como superficies de Gauss vamos a elegir cilindros concéntricos de radio r y altura L. RECUERDEN QUE EL CAMPO ELECTRICO NO PUEDE DEPENDER DE LOS PARAMETROS DE ESTOS CILINDROS



$$\int\int E(r)\hat{r}.d\vec{S} \;=\; \int\int_{\mathrm{TAPA_{SUP}}} E(r)\hat{r}.\hat{z}rdrd\phi +$$



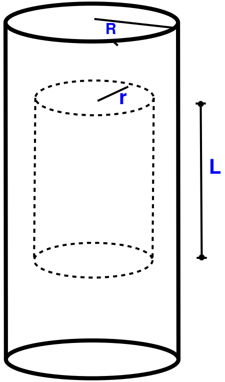
$$\int\int E(r)\hat{r}.d\vec{S} = \int\int_{\mathrm{TAPA_{SUP}}} E(r)\hat{r}.\hat{z}rdrd\phi + \int\int_{\mathrm{TAPA_{INF}}} E(r)\hat{r}.(-\hat{z})rdrd\phi +$$



$$\int\int E(r)\hat{r}.d\vec{S} = \int\int_{\text{TAPA}_{\text{SUP}}} E(r)\hat{r}.\hat{z}rdrd\phi + \int\int_{\text{TAPA}_{\text{INF}}} E(r)\hat{r}.(-\hat{z})rdrd\phi + \int\int_{\text{PARED}} E(r)\hat{r}.\hat{r}rdzd\phi$$

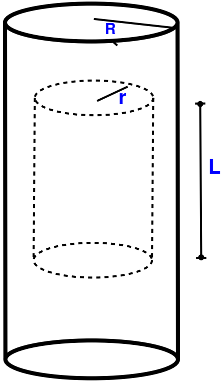
Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Comenzamos por el caso $r < R$:



Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

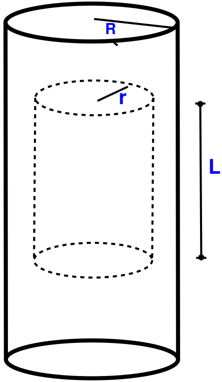
Comenzamos por el caso $r < R$:



$$\int_{-L/2}^{L/2}\int_{0}^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r}rd\phi dz \quad = \quad \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \int_V \rho dV$$

Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

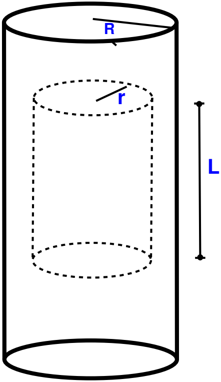
Comenzamos por el caso $r < R$:



$$\begin{aligned}\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r} r d\phi dz &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \int_V \rho dV \\ 2\pi L E(r) r &= \int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{\rho}{\epsilon_0} r dr d\phi dz\end{aligned}$$

Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Comenzamos por el caso $r < R$:



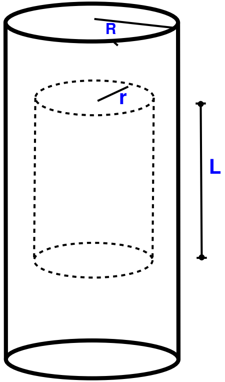
$$\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r}rd\phi dz = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \int_V \rho dV$$

$$2\pi L E(r) r = \int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{\rho}{\epsilon_0} r dr d\phi dz$$

$$2\pi L E(r) r = \frac{\rho\pi r^2 L}{\epsilon_0}$$

Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Comenzamos por el caso $r < R$:



$$\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r} r d\phi dz = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \int_V \rho dV$$

$$2\pi L E(r) r = \int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{\rho}{\epsilon_0} r dr d\phi dz$$

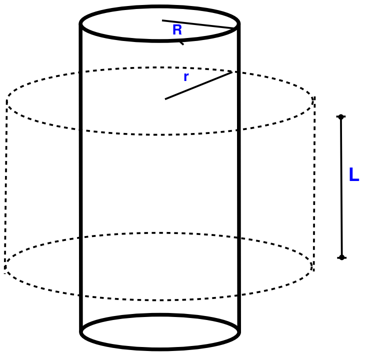
$$2\pi L E(r) r = \frac{\rho \pi r^2 L}{\epsilon_0}$$

Por lo tanto para $r < R$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{r}$$

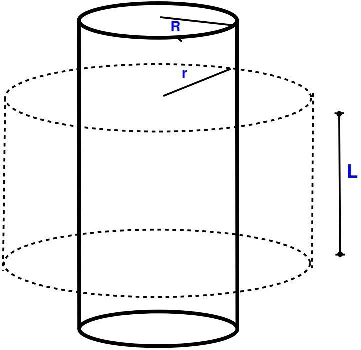
Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Seguimos con el caso $r > R$:



Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

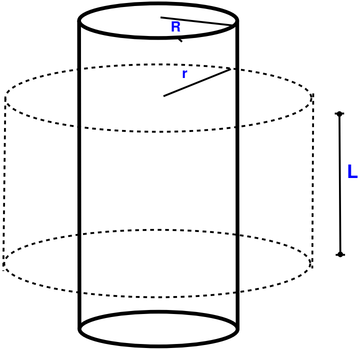
Seguimos con el caso $r > R$:



$$\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r}rd\phi dz \quad = \quad \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

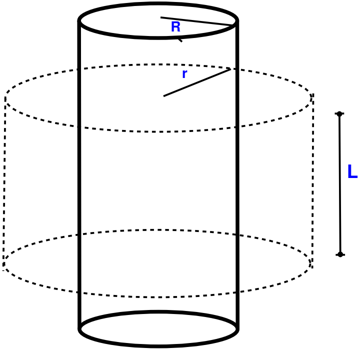
Seguimos con el caso $r > R$:



$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{0}^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r} r d\phi dz &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \\ 2\pi L E(r) r &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Seguimos con el caso $r > R$:



$$\int_{-L/2}^{L/2}\int_{0}^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r}rd\phi dz = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

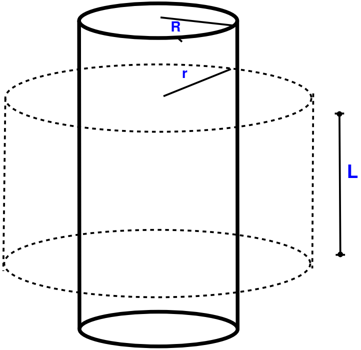
$$2\pi LE(r)r = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Ahora calculemos Q_{enc}:

$$Q_{enc} = \int_{-L/2}^{L/2}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R} \rho r\, dr\, d\phi\, dz$$

Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Seguimos con el caso $r > R$:



$$\int_{-L/2}^{L/2}\int_{0}^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r}r d\phi dz = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

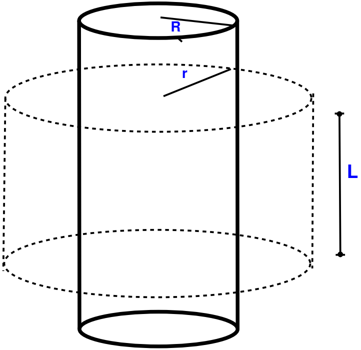
$$2\pi L E(r) r = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Ahora calculemos Q_{enc}:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= \int_{-L/2}^{L/2}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R} \rho r\, dr\, d\phi\, dz \\ &= \rho\pi R^2 L \end{aligned}$$

Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Seguimos con el caso $r > R$:



$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r} r d\phi dz &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \\ 2\pi L E(r) r &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

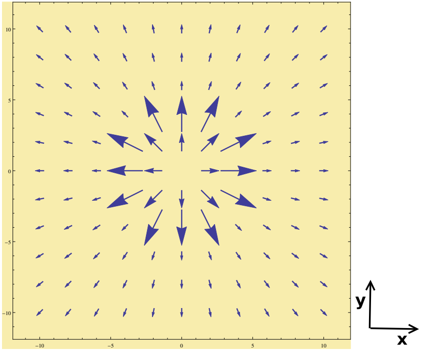
Ahora calculemos Q_{enc}:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= \int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho r \, dr \, d\phi \, dz \\ &= \rho\pi R^2 L \end{aligned}$$

Entonces para $r > R$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}$$

Campo eléctrico de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

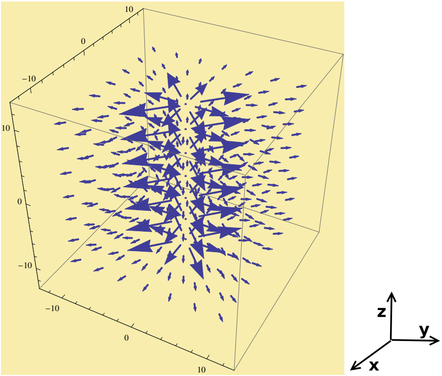


Resumiendo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0}\,\hat{r}\,, & r \leq R\,, \\ \\ \dfrac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\,\hat{r}\,, & r > R\,. \end{cases}$$

En la figura se muestra el campo eléctrico de un cilindro cargado uniformemente en volumen en el plano xy, es decir $z = \mathrm{cte}$.

CAMPO ELÉCTRICO DE UN CILINDRO INFINITO CON DENSIDAD DE CARGA UNIFORME ρ Y RADIO R

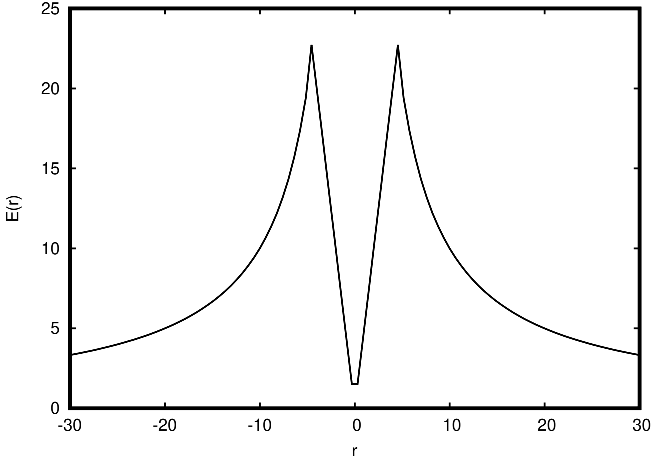


Resumiendo:

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0}\,\hat{r}\,, & r \leq R\,, \\[2ex] \dfrac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\,\hat{r}\,, & r > R\,. \end{cases}$$

En la figura se muestra el campo eléctrico de un cilindro cargado uniformemente en volumen.

Por último, graficamos $E(r)$ en función de r:



Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Comencemos por el caso $r < R$:

$$V(\vec{r}) \;\; = \;\; -\int \vec{E}.d\vec{r} + \mathrm{cte}$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Comencemos por el caso $r < R$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.d\vec{r} + \text{cte} \\ &= -\int \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{r}.\hat{r}dr + C_1 \end{aligned}$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Comencemos por el caso $r < R$:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.d\vec{r} + \mathrm{cte} \\
&= -\int \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{r}.\hat{r}dr + C_1 \\
&= -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + C_1
\end{aligned}
$$

donde C_1 es una constante.

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$V(\vec{r}) \;=\; -\int \vec{E}.d\vec{r} + \text{cte}$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.d\vec{r} + \text{cte} \\ &= -\int \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr + C_2 \end{aligned}$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.d\vec{r} + \mathrm{cte} \\ &= -\int \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr + C_2 \\ &= -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln r + C_2 \end{aligned}$$

donde C_2 es una constante.

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.d\vec{r} + \text{cte} \\ &= -\int \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr + C_2 \\ &= -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln r + C_2 \end{aligned}$$

donde C_2 es una constante. Ahora tenemos que determinar C_1 y C_2 para que $V(r)$ sea continuo en todo punto del espacio. Para ellos tenemos que pedir que V sea continuo en $r = R$:

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.d\vec{r} + \text{cte} \\ &= -\int \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr + C_2 \\ &= -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln r + C_2 \end{aligned}$$

donde C_2 es una constante. Ahora tenemos que determinar C_1 y C_2 para que $V(r)$ sea continuo en todo punto del espacio. Para ellos tenemos que pedir que V sea continuo en $r = R$:

$$-\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln R + C_2 = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + C_1$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.d\vec{r} + \mathrm{cte} \\ &= -\int \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr + C_2 \\ &= -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln r + C_2 \end{aligned}$$

donde C_2 es una constante. Ahora tenemos que determinar C_1 y C_2 para que $V(r)$ sea continuo en todo punto del espacio. Para ellos tenemos que pedir que V sea continuo en $r = R$:

$$-\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln R + C_2 = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + C_1$$

Elegimos $C_2 = 0$ y $C_1 = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln R$.

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

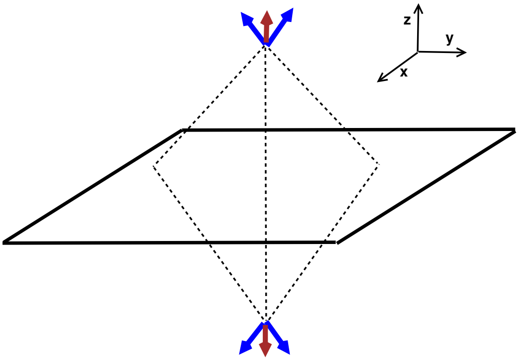
En resumen, obtenemos:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\rho r^2}{4\epsilon_0}\,, & r \leq R\,, \\[2ex] -\dfrac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln r + \frac{\rho R^2 \ln R}{2\epsilon_0} - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}\,, & r > R\,. \end{cases}$$

LAS SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES SON CILINDROS DE RADIO r

Campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga uniforme σ

En primer lugar veamos de qué coordenadas depende el campo y cuál es su dirección.

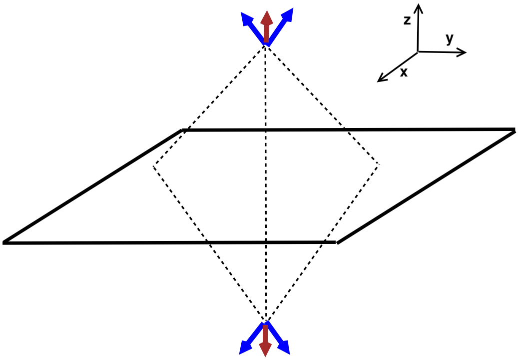


Se puede ver que la configuración de cargas tiene simetría de traslación en los ejes x e y y por lo tanto:

$$E = E(z)$$

Campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga uniforme σ

En primer lugar veamos de qué coordenadas depende el campo y cuál es su dirección.



Se puede ver que la configuración de cargas tiene simetría de traslación en los ejes x e y y por lo tanto:

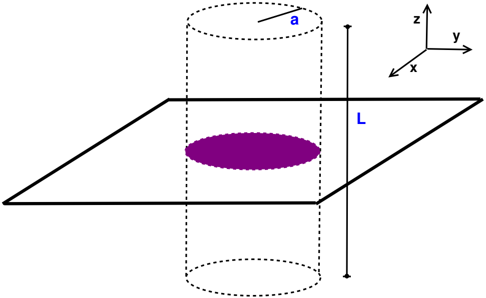
$$E = E(z)$$

Por otra parte, del dibujo podemos inferir que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} E(z)\hat{z} & z > 0 \\ -E(z)\hat{z} & z < 0 \end{cases}$$

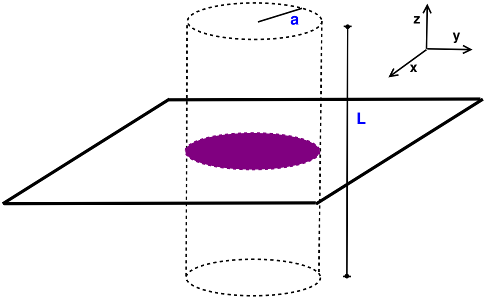
Campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga uniforme σ

Como superficie de Gauss vamos a utilizar un cilindro de radio a y altura L como se puede ver en la figura. RECORDAR QUE EL CAMPO ELECTRICO NO DEBE DEPENDER DE LOS PARAMETROS DE CILINDRO.



Campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga uniforme σ

Como superficie de Gauss vamos a utilizar un cilindro de radio a y altura L como se puede ver en la figura. RECORDAR QUE EL CAMPO ELECTRICO NO DEBE DEPENDER DE LOS PARAMETROS DE CILINDRO.



$$\iint \vec{E}.d\vec{S} = \iint_{\mathrm{TAPA}_1} \vec{E}.d\vec{S} + \iint_{\mathrm{TAPA}_2} \vec{E}.d\vec{S} + \iint_{\mathrm{PARED}} \vec{E}.d\vec{S}$$

donde TAPA_1 refiere a la tapa superior del cilindro y TAPA_2 refiere a la tapa inferior del cilindro.

Campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga uniforme σ

La normal a la pared del cilindro se puede escribir como $\vec{n} = \hat{r}$ y como $\vec{E} = \pm E(z)\hat{z}$ entonces sólo van a contribuir las integrales de las tapas del cilindro.

Campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga uniforme σ

La normal a la pared del cilindro se puede escribir como $\vec{n} = \hat{r}$ y como $\vec{E} = \pm E(z)\hat{z}$ entonces sólo van a contribuir las integrales de las tapas del cilindro.

$$\iint \vec{E}.d\vec{S} \;\; = \;\; \int_0^a \int_0^{2\pi} E(z)\,\hat{z}.\,\hat{z}\,r\,dr\,d\phi + \int_0^a \int_0^{2\pi} E(-z)\,(\hat{z}).(-\hat{z})\,r\,dr\,d\phi$$

Campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga uniforme σ

La normal a la pared del cilindro se puede escribir como $\vec{n} = \hat{r}$ y como $\vec{E} = \pm E(z)\hat{z}$ entonces sólo van a contribuir las integrales de las tapas del cilindro.

$$\begin{aligned}
\iint \vec{E}.d\vec{S} &= \int_0^a \int_0^{2\pi} E(z)\,\hat{z}.\,\hat{z}\,r\,dr\,d\phi + \int_0^a \int_0^{2\pi} E(-z)\,(\hat{z}).(-\hat{z})\,r\,dr\,d\phi \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} E(z)\,\hat{z}.\,\hat{z}\,r\,dr\,d\phi + \int_0^a \int_0^{2\pi} E(z)\,(-\hat{z}).(-\hat{z})\,r\,dr\,d\phi
\end{aligned}$$

Campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga uniforme σ

La normal a la pared del cilindro se puede escribir como $\vec{n} = \hat{r}$ y como $\vec{E} = \pm E(z)\hat{z}$ entonces sólo van a contribuir las integrales de las tapas del cilindro.

$$\begin{aligned}
\iint \vec{E}.d\vec{S} &= \int_0^a \int_0^{2\pi} E(z)\,\hat{z}.\,\hat{z}\,r\,dr\,d\phi + \int_0^a \int_0^{2\pi} E(-z)\,(\hat{z}).(-\hat{z})\,r\,dr\,d\phi \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} E(z)\,\hat{z}.\,\hat{z}\,r\,dr\,d\phi + \int_0^a \int_0^{2\pi} E(z)\,(-\hat{z}).(-\hat{z})\,r\,dr\,d\phi \\
&= \pi a^2 E(z) + \pi a^2 E(z)
\end{aligned}$$

donde entre el primer paso y el segundo usamos que $E(-z)\hat{z} = E(z)(-\hat{z})$

.

Campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga uniforme σ

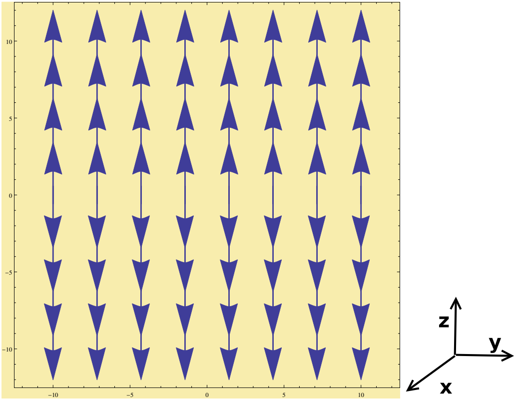
La normal a la pared del cilindro se puede escribir como $\vec{n} = \hat{r}$ y como $\vec{E} = \pm E(z)\hat{z}$ entonces sólo van a contribuir las integrales de las tapas del cilindro.

$$\begin{aligned}
\iint \vec{E}.d\vec{S} &= \int_0^a \int_0^{2\pi} E(z)\,\hat{z}.\,\hat{z}\,r\,dr\,d\phi + \int_0^a \int_0^{2\pi} E(-z)\,(\hat{z}).(-\hat{z})\,r\,dr\,d\phi \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} E(z)\,\hat{z}.\,\hat{z}\,r\,dr\,d\phi + \int_0^a \int_0^{2\pi} E(z)\,(-\hat{z}).(-\hat{z})\,r\,dr\,d\phi \\
&= \pi a^2 E(z) + \pi a^2 E(z)
\end{aligned}$$

donde entre el primer paso y el segundo usamos que $E(-z)\hat{z} = E(z)(-\hat{z})$. Calculamos ahora la carga encerrada:

$$Q_{enc} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sigma\,r\,dr\,d\phi = \sigma\pi a^2$$

Campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga uniforme σ

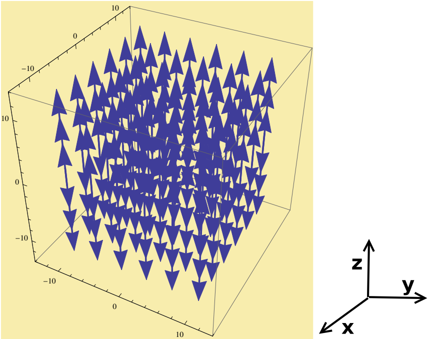


Entonces

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & z < 0 \end{cases}$$

En la figura
se muestra el campo eléctrico del plano con densidad de carga σ en el plano yz. El eje vertical es el eje z. Un gráfico similar corresponde al plano xz.

Campo eléctrico de un plano infinito con carga uniforme σ

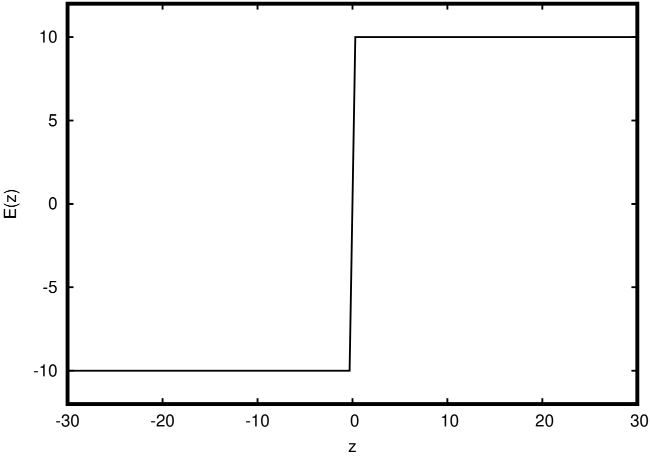


Entonces

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & z < 0 \end{cases}$$

En la figura
se muestra el campo eléctrico
del plano con densidad
de carga σ en todo el espacio.

Por último, graficamos $E(z)$ en función de z:



Potencial de un plano infinito con carga uniforme σ

Calculamos ahora el potencial $V(r)$ para $z > 0$:

$$V(\vec{r}) \;=\; -\int \vec{E}.\vec{dr} = -\int (E_x, E_y, E_z).(dx, dy, dz) + \mathrm{cte}$$

Potencial de un plano infinito con carga uniforme σ

Calculamos ahora el potencial $V(r)$ para $z > 0$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.\vec{dr} = -\int (E_x, E_y, E_z).(dx, dy, dz) + \text{cte} \\ &= -\int \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} \, . \, \hat{z} \, dz + C_1 \end{aligned}$$

Potencial de un plano infinito con carga uniforme σ

Calculamos ahora el potencial $V(r)$ para $z > 0$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.\vec{dr} = -\int (E_x, E_y, E_z).(dx, dy, dz) + \text{cte} \\ &= -\int \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\,.\,\hat{z}\,dz + C_1 \\ &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_1 \end{aligned}$$

donde C_1 es una constante. El cálculo para $z < 0$ es análogo y quedará una constante C_2 a determinar:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_1 & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_2 & z < 0 \end{cases}$$

Pidiendo que $V(z=0)$ sea continua, obtenemos $C_1 = C_2$. A su vez, elegimos $C_1 = C_2 = 0$

Potencial de un plano infinito con carga uniforme σ

Calculamos ahora el potencial $V(r)$ para $z > 0$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.\vec{dr} = -\int (E_x, E_y, E_z).(dx, dy, dz) + \text{cte} \\ &= -\int \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\,.\,\hat{z}\,dz + C_1 \\ &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_1 \end{aligned}$$

donde C_1 es una constante. El cálculo para $z < 0$ es análogo y quedará una constante C_2 a determinar:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_1 & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_2 & z < 0 \end{cases}$$

Pidiendo que $V(z = 0)$ sea continua, obtenemos $C_1 = C_2$. A su vez, elegimos $C_1 = C_2 = 0$

Potencial de un plano infinito con carga uniforme σ

Finalmente obtenemos:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z & z < 0 \end{cases}$$

Se puede verificar que el potencial es continuo en todo el espacio.

Potencial de un plano infinito con carga uniforme σ

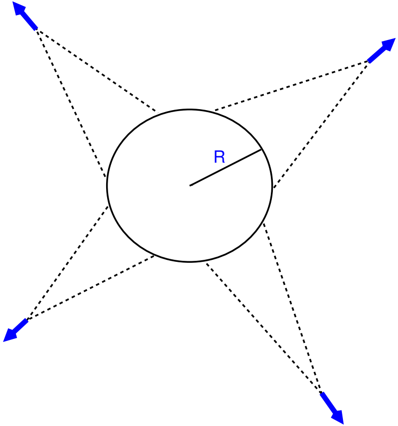
Finalmente obtenemos:

$$V(\vec{r}) \quad = \quad \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z & z < 0 \end{cases}$$

Se puede verificar que el potencial es continuo en todo el espacio.

LAS SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES SON PLANOS INFINITOS A Z=CTE

Campo eléctrico de una esfera con densidad de carga uniforme ρ

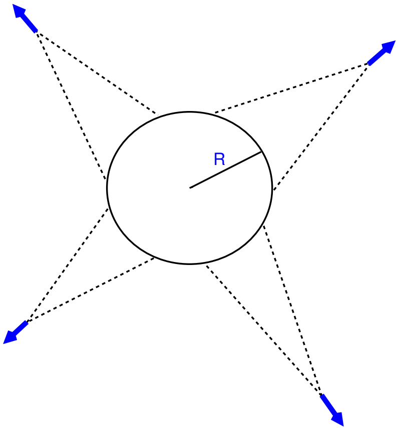


Del dibujo se puede ver que el campo eléctrico de una esfera:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

donde
r y $\hat{r}$ refieren a coordenadas esféricas.

Campo eléctrico de una esfera con densidad de carga uniforme ρ

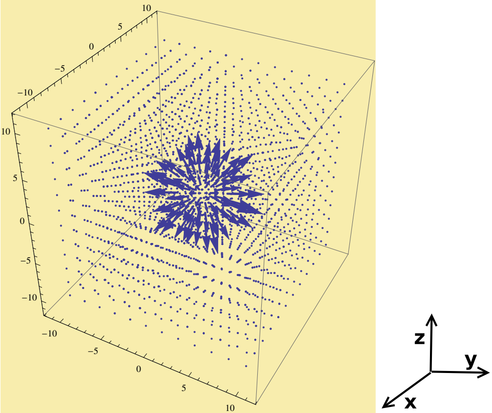


Del dibujo se puede ver que el campo eléctrico de una esfera:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

donde r y $\hat{r}$ refieren a coordenadas esféricas. Las superficies de Gauss que conviene elegir son esferas concéntricas a la esfera cargada. Conviene elegir una esfera con radio $r < R$ y otra con $r > R$.

CAMPO ELÉCTRICO DE UNA ESFERA CON CARGA UNIFORME ρ



En la figura se muestra el campo eléctrico de una esfera en todo el espacio. Se puede ver que el campo tendrá una expresión para $r < R$ y otra para $r > R$.

Resumen

- Elegir las coordenadas con las cuales describir el problema.
- Deducir la dependencia del campo eléctrico a partir de la simetría de la configuración de cargas.
- Deducir la dirección del campo eléctrico recordando que $\vec{E} \simeq \vec{r} - \vec{r'}$ y usando la simetría de la configuración de cargas.
- Elegir la superficie de Gauss a utilizar.
- Usar la ley de Gauss para obtener el campo eléctrico en todo el espacio