Clase 6: Conductores

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

13 de abril de 2021

Conductores

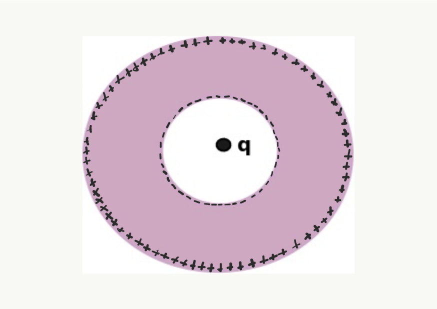
En esta clase vamos a aprender los efectos que tienen sobre los campos eléctricos la presencia de materiales conductores. Para ello vamos a explicar la resolución del Problema 3 de la Guía 2.

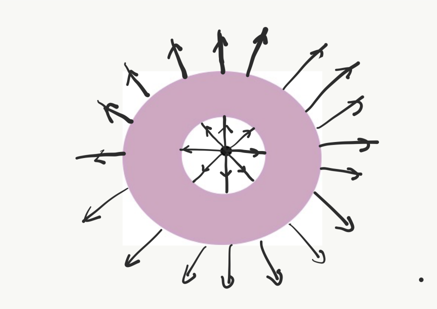
En los materiales conductores, los electrones pueden desplazarse libremente. A su vez, en todo el conductor, el campo eléctrico es nulo $\vec{E} = 0$ y por lo tanto el potencial es constante $V = \mathrm{cte}$. En las superficies de los conductores el campo eléctrico es siempre perpendicular a las mismas.

En el problema 3 se presentan diferentes configuraciones de cargas y conductores. Se pide dibujar las cargas inducidas y las líneas de campo en cada caso.

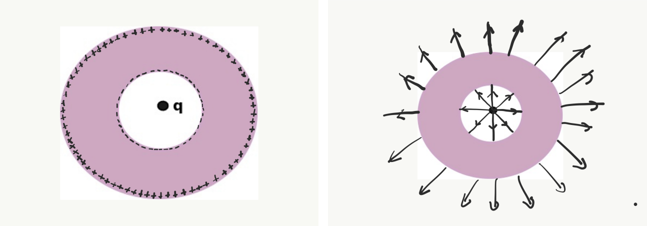
Problema 3

En este caso tenemos un conductor hueco con carga total nula $Q = 0$, en el hueco se encuentra alojada una carga q .





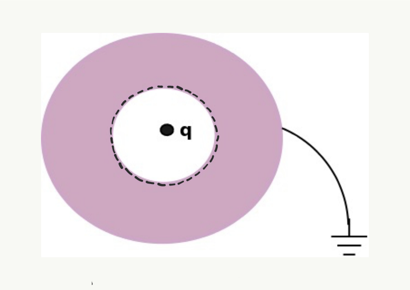
En la figura de la izquierda se encuentran dibujadas las cargas inducidas sobre la superficie interior y exterior del conductor. En la figura de la derecha se encuentran dibujadas las líneas de campo eléctrico.

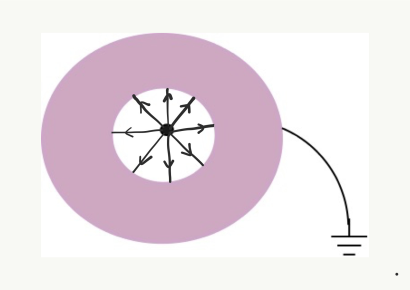


Comentario: En el único lugar donde no hay líneas de campo es en el conductor. Se inducen cargas en la superficie interior para que el campo eléctrico se anule. La carga total inducida en la superficie interior del conductor es $-q$. Como la carga total del conductor es nula, se induce una carga positiva total q en la superficie exterior del conductor. Afuera del conductor las líneas de campo son iguales al caso en el cual hubiera una carga q en el centro del conductor.

Problema 3

Este caso es igual al anterior, con la diferencia que el conductor se encuentra conectado a tierra. Es decir sobre el conductor $V = 0$.

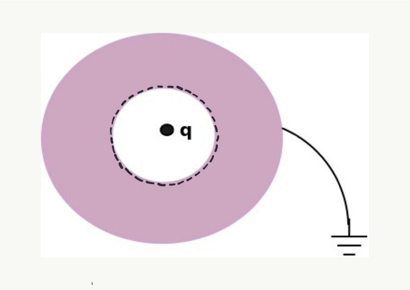


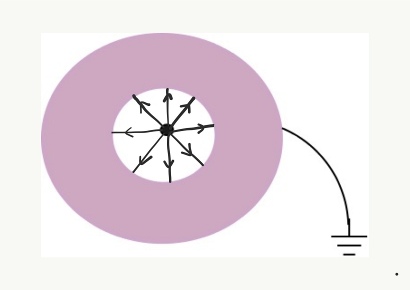


En este caso, se inducen cargas en la superficie interior del conductor para que el campo eléctrico en el interior del mismo sea nulo. La batería provee las cargas necesarias para que $V = 0$ en todo el conductor.

Problema 3

Este caso es igual al anterior, con la diferencia que el conductor se encuentra conectado a tierra. Es decir sobre el conductor $V = 0$.

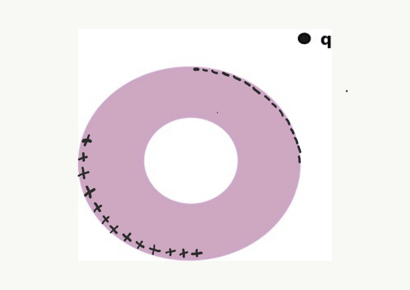


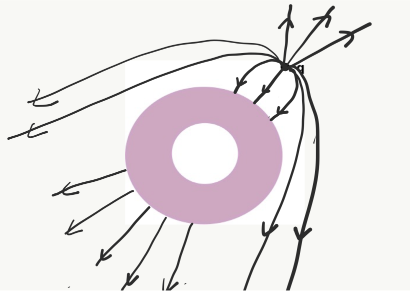


La carga total inducida sobre la superficie interior del conductor es $-q$. Sólo hay líneas campo en el hueco del conductor. De esta manera, la conexión a tierra aisla el interior del exterior, ya que en el exterior no hay campo eléctrico generado por la carga q alojada en el hueco del conductor.

Problema 3

En este caso tenemos una carga q ubicada fuera del conductor.

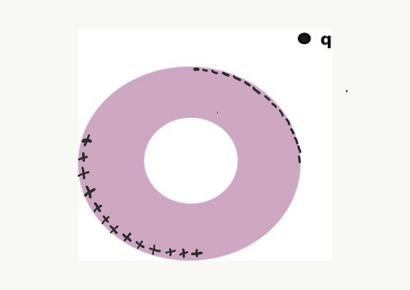


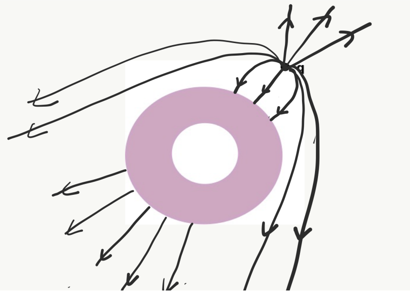


Sobre la parte de la superfice exterior que esta enfrente de la carga se inducen cargas ($Q_{\text{total inducida}} = -q$) para que el campo eléctrico sea nulo en todo el conductor. Pero, además se debe cumplir que $Q = 0$. Para eso, en el interior del conductor se inducen cargas ($Q_{\text{total inducida}} = q$) en la superficie exterior del conductor que NO está enfrentada a la carga.

PROBLEMA 3

En este caso tenemos una carga q ubicada fuera del conductor.

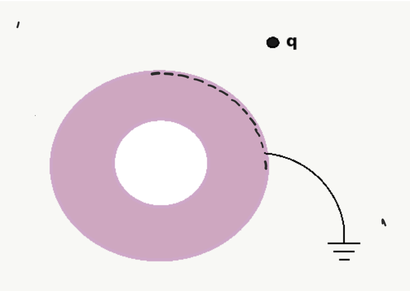


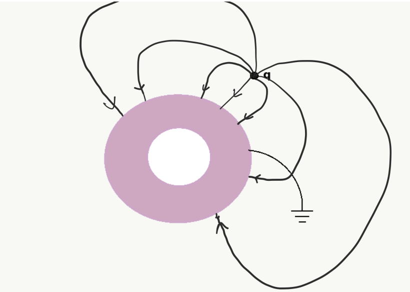


De esta manera, hay líneas campo eléctrico en todo el espacio salvo en la región ocupada por el conductor y el hueco.

Problema 3

Este caso es igual al anterior con al diferencia que la batería está conectada a tierra.

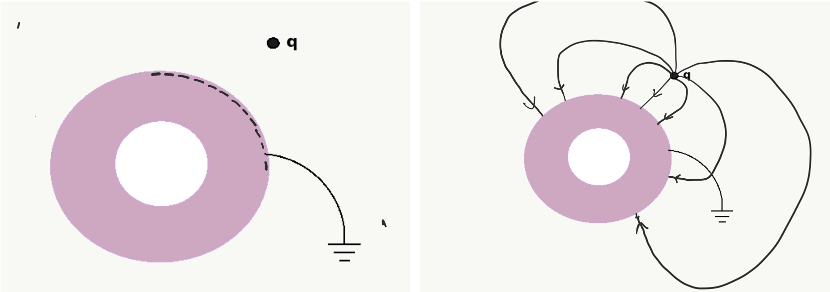




Sobre la parte de la superfice exterior que esta enfrente de la carga se inducen cargas ($Q_{\text{total inducida}} = -q$) para que el campo eléctrico sea nulo en todo el conductor. La batería provee las cargas, de manera tal que todas las líneas de campo mueren sobre la superficie del mismo.

PROBLEMA 3

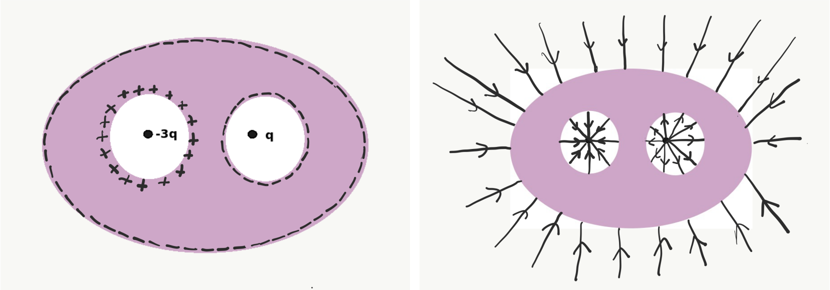
Este caso es igual al anterior con al diferencia que la batería está conectada a tierra.



Hay líneas campo eléctrico en todo el espacio salvo en la región ocupada por el conductor y el hueco del mismo. De esta manera, la conexión a tierra asegura que el hueco del conductor esta toalmente aislado de las cargas del exterior del mismo. A este tipo de dispositivo se lo denomina **Jaula de Faraday**.

Problema 3

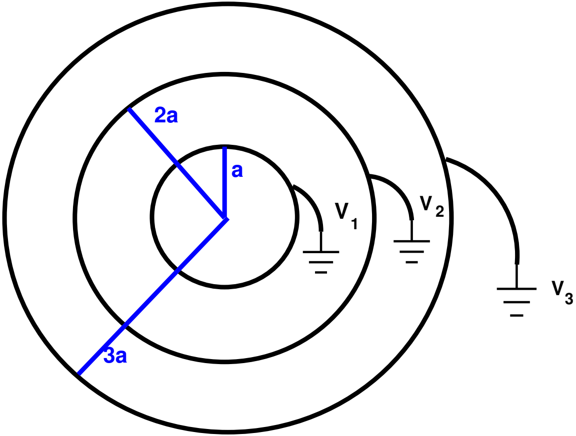
En este problema, el conductor tiene dos huecos, en el hueco 1 hay alojado una carga q , y en el hueco 2 una carga $-3q$.



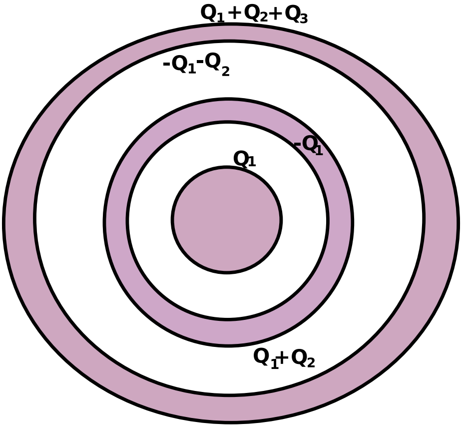
En la superficie del hueco 1 se induce una carga $-q$, mientras que en la superficie del hueco 2 se induce una carga $3q$. En único lugar del espacio donde no hay líneas de campo eléctrico es en el conductor. Afuera del conductor, las líneas de campo son iguales a tener una carga $-2q$ (carga inducida en la superficie exterior del conductor) en el centro del conductor.

Problema 5

En este problema, tenemos la distribución de conductores esféricos concéntricos que se muestra en la figura. Además $V_1 = V_0$, $V_2 = V_3 = 2V_0$. Se pide detallar la carga inducida en cada esfera y su distribución.



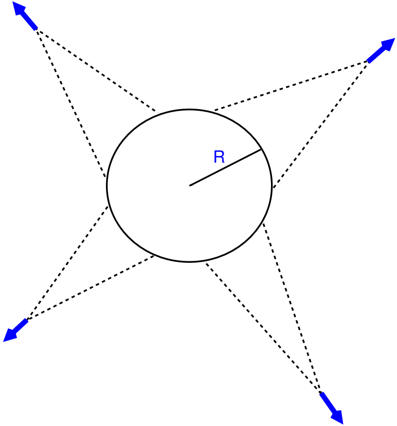
Problema 5



En la figura se muestra la distribución de cargas de cada superficie interna y externa de cada conductor. Por lo tanto, la carga total el conductor 1 es Q_1, la respectiva sobre el conductor 2 es Q_2, y la respectiva sobre el conductor 3 es Q_3.

Ahora vamos a calcular los valores de cada una de ellas en función de los datos. Como hay simetría esférica sabemos que $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ con $\hat{r}$ de coordenadas esféricas

Campo eléctrico de una esfera con densidad de carga superficial uniforme σ

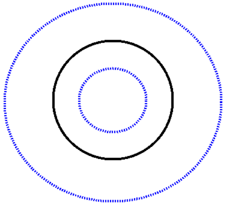


Del dibujo se puede ver
que el campo eléctrico de una
esfera cargada en superficie:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

donde r y $\hat{r}$ refieren
a coordenadas esféricas.

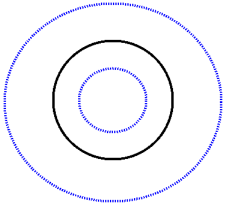
Campo eléctrico de una esfera con densidad de carga superficial uniforme σ



Para ambas superficies de Gauss (esfera interior y esfera exterior) vale:

$$\begin{aligned}\int\int \vec{E}.\vec{ds} &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r}r^2\sin\theta d\phi d\theta \\ &= 4\pi r^2 E(r)\end{aligned}$$

Campo eléctrico de una esfera con densidad de carga superficial uniforme σ



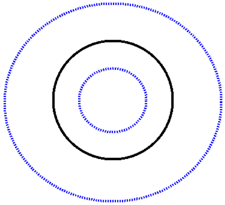
Para ambas superficies de Gauss (esfera interior y esfera exterior) vale:

$$\begin{aligned}\int\int \vec{E}.\vec{ds} &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r}r^2\sin\theta d\phi d\theta \\ &= 4\pi r^2 E(r)\end{aligned}$$

Veamos ahora la Q_{enc}. Para $r < R$ $Q_{\text{enc}} = 0$ y por lo tanto $E(r) = 0$. Para $r > R$

$$Q_{\text{enc}} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma R^2 \sin\theta d\phi d\theta = 4\pi R^2\sigma = Q$$

Campo eléctrico de una esfera con densidad de carga superficial uniforme σ



Para ambas superficies de Gauss (esfera interior y esfera exterior) vale:

$$\begin{aligned} \int\int \vec{E}.\vec{ds} &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} E(r)\hat{r}.\hat{r}r^2\sin\theta d\phi d\theta \\ &= 4\pi r^2 E(r) \end{aligned}$$

Veamos ahora la Q_{enc}. Para $r < R$ $Q_{\text{enc}} = 0$ y por lo tanto $E(r) = 0$. Para $r > R$

$$Q_{\text{enc}} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma R^2 \sin\theta d\phi d\theta = 4\pi R^2\sigma = Q$$

Y por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Problema 5

En resumen, el campo de una esfera de radio R cargada en superficie con carga Q :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} & r > R\,. \end{cases}$$

Problema 5

En resumen, el campo de una esfera de radio R cargada en superficie con carga Q :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} & r > R\,. \end{cases}$$

y para calcular el potencial, utilizo la expresión $V(\vec{r}) = -\int \vec{E}.\vec{dl} + \mathrm{cte}$

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} C_1 & r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2 & r > R\,. \end{cases}$$

Problema 5

En resumen, el campo de una esfera de radio R cargada en superficie con carga Q :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} & r > R\,. \end{cases}$$

y para calcular el potencial, utilizo la expresión $V(\vec{r}) = -\int \vec{E}.\vec{dl} + \mathrm{cte}$

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} C_1 & r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2 & r > R\,. \end{cases}$$

Ahora voy a elegir $V(r \to \infty) = 0$, con lo cual $C_2 = 0$. Finalmente para que el potencial sea continuo en $r = R$, $C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$:

Problema 5

En resumen, el potencial de una esfera de radio R cargada en superficie con carga Q :

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & r \leq R \\ \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > R\,. \end{cases}$$

Problema 5

El potencial de las tres esferas lo voy a calcular por superposición, hay que tener cuidado superponer la expresión de cada esfera en cada región.

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \dfrac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (2a)} + \dfrac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 (3a)} & r \leq a \\[2ex] \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \dfrac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (2a)} + \dfrac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 (3a)} & a \leq r \leq 2a \\[2ex] \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \dfrac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \dfrac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 (3a)} & 2a \leq r \leq 3a \\[2ex] \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \dfrac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \dfrac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r} & r > 3a \end{cases}$$

Problema 5

Para obtener los valores de Q_1, Q_2 y Q_3, vamos a pedir que el valor del potencial en cada una de las baterías sea igual al dato que nos da el problema, es decir,

$$V(r=a) = V_1 = V_0 \qquad V(r=2a) = V_2 = 2V_0 \qquad V(r=3a) = V_3 = 2V_0$$

Problema 5

Para obtener los valores de Q_1, Q_2 y Q_3, vamos a pedir que el valor del potencial en cada una de las baterías sea igual al dato que nos da el problema, es decir,

$$V(r=a) = V_1 = V_0 \qquad V(r=2a) = V_2 = 2V_0 \qquad V(r=3a) = V_3 = 2V_0$$

Aplicando estas condiciones a la expresión del potencial de la página anterior obtenemos:

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_2}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_3}{12\pi\epsilon_0 a} = V_0$$

Problema 5

Para obtener los valores de Q_1, Q_2 y Q_3, vamos a pedir que el valor del potencial en cada una de las baterías sea igual al dato que nos da el problema, es decir,

$$V(r=a) = V_1 = V_0 \qquad V(r=2a) = V_2 = 2V_0 \qquad V(r=3a) = V_3 = 2V_0$$

Aplicando estas condiciones a la expresión del potencial de la página anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_2}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_3}{12\pi\epsilon_0 a} &= V_0 \\ \frac{Q_1+Q_2}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_3}{12\pi\epsilon_0 a} &= 2V_0 \end{aligned}$$

Problema 5

Para obtener los valores de Q_1, Q_2 y Q_3, vamos a pedir que el valor del potencial en cada una de las baterías sea igual al dato que nos da el problema, es decir,

$$V(r=a) = V_1 = V_0 \qquad V(r=2a) = V_2 = 2V_0 \qquad V(r=3a) = V_3 = 2V_0$$

Aplicando estas condiciones a la expresión del potencial de la página anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_2}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_3}{12\pi\epsilon_0 a} &= V_0 \\
\frac{Q_1+Q_2}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_3}{12\pi\epsilon_0 a} &= 2V_0 \\
\frac{Q_1+Q_2}{12\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_3}{12\pi\epsilon_0 a} &= 2V_0
\end{aligned}$$

con lo cual tenemos un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas

Problema 5

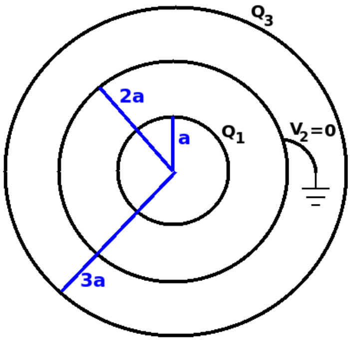
Resolviendo el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas obtenemos:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= -8\pi\epsilon_0 a V_0 \\
Q_2 &= 8\pi\epsilon_0 a V_0 \\
Q_3 &= 24\pi\epsilon_0 a V_0
\end{aligned}
$$

De esta manera resolvimos el inciso a) del Problema 5.

Problema 5

Inciso b) Si se desconectan las esferas de las baterías y a continuación la esfera A2 se une a tierra, calcular en esta situación, las cargas (detallar su distribución) y los potenciales de cada esfera.



La distribución de cargas sobre las esferas A1 y A3 van a seguir igual, lo que se va a modificar es la carga sobre la esfera A2.

Problema 5

Para calcular el valor de Q_2, debemos plantear ahora que $V(r=2a)=0$, mientras que Q_1 y Q_3 tienen los mismos valores que hallamos anteriormente::

$$\frac{Q_1+Q_2}{8\pi\epsilon_0 a}+\frac{Q_3}{12\pi\epsilon_0 a} \quad = \quad 0$$

Problema 5

Para calcular el valor de Q_2, debemos plantear ahora que $V(r=2a)=0$, mientras que Q_1 y Q_3 tienen los mismos valores que hallamos anteriormente::

$$\begin{aligned} \frac{Q_1+Q_2}{8\pi\epsilon_0 a}+\frac{Q_3}{12\pi\epsilon_0 a} &= 0 \\ \frac{-8\pi\epsilon_0 a V_0}{8\pi\epsilon_0 a}+\frac{Q_2}{8\pi\epsilon_0 a}+\frac{24\pi\epsilon_0 a V_0}{12\pi\epsilon_0 a} &= 0 \end{aligned}$$

Para calcular el valor de Q_2, debemos plantear ahora que $V(r=2a)=0$, mientras que Q_1 y Q_3 tienen los mismos valores que hallamos anteriormente::

$$\begin{aligned} \frac{Q_1+Q_2}{8\pi\epsilon_0 a}+\frac{Q_3}{12\pi\epsilon_0 a} &= 0 \\ \frac{-8\pi\epsilon_0 a V_0}{8\pi\epsilon_0 a}+\frac{Q_2}{8\pi\epsilon_0 a}+\frac{24\pi\epsilon_0 a V_0}{12\pi\epsilon_0 a} &= 0 \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos:

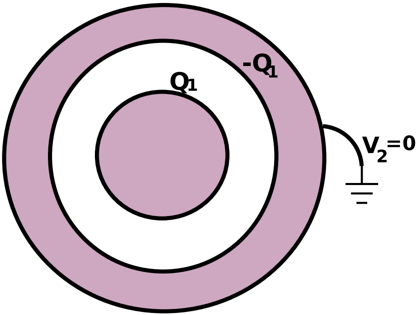
$$Q_2 = -8\pi\epsilon_0 a V_0$$

Problema 5

Inciso c) Partiendo de (b), se separa de la configuración al conductor A3. Qué sucede en este caso con las cargas de las esferas A1 y A2?. Justificar su respuesta.

Problema 5

Inciso c) Partiendo de (b), se separa de la configuración al conductor A3. Qué sucede en este caso con las cargas de las esferas A1 y A2?. Justificar su respuesta.



La carga sobre el conductor A1 permanece igual ya que esa esfera no está conectada a ninguna batería, mientras que la batería conectada al conductor A2 provee las cargas necesarias para que $V = 0$. A partir del dibujo se puede ver que la carga inducida sobre la esfera A2 será $= -Q_1$.