(1)

GUIA 2
PROBLEMA 19

Para $r<a$ y $r>b$
el medio es vacío y por lo tanto no hay polarización $\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{P}=0$

Para $a<r<c$ y $c<r<b$

el medio es lineal isótropo y homogéneo
Por lo tanto $\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$

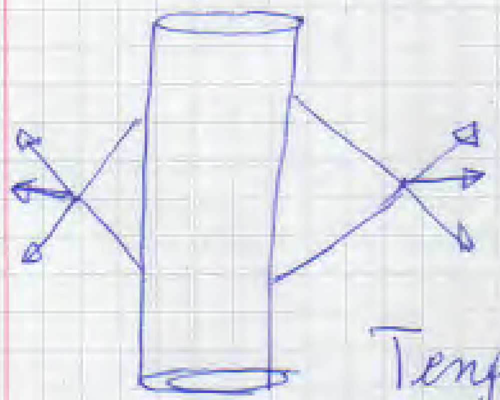
De esta manera mostramos como $\vec{\nabla}\times\vec{P}=0$ en todo el espacio. Las ecuaciones para $\vec{D}$ son:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_L \quad \text{y} \quad \vec{\nabla}\times\vec{D}=\vec{\nabla}\times\vec{P}=0$$

Las fuentes de $\vec{D}$ son las cargas libres del condensador cilíndrico. Voy a calcular $\vec{D}$ usando el teorema de Gauss y el principio de superposición. También hago la aproximación que el campo de un cilindro <u>infinito</u> cargado con Q_L es buena aproximación para describir el campo de un cilindro <u>finito</u> cargado con Q_L

A continuación voy a resolver el problema del campo $\vec{D}$ de un cilindro cargado con Q_L y radio R

Hay simetría de rotación alrededor del eje z
y de traslación alrededor del eje z
$\Rightarrow \vec{D} = \vec{D}(r)$



Como el cilindro es infinito siempre se pueden encontrar 2 puntos simétricos tal que $\vec{D} = D(r)\,\hat{r}$

Tengo el mismo problema que tenía para el campo eléctrico de un cilindro infinito cargado en superficie a menos de una cte $\frac{1}{\varepsilon_0}$
Entonces puedo tomar la solución para el campo eléctrico y escribir

$$\vec{D}_{cil} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{Q_L}{2\pi L r}\,\hat{r} & r > R \end{cases}$$

Para calcular el campo del <u>capacitor</u> cilíndrico superpongo el campo $\vec{D}$ de un cilindro cargado con Q_L y radio a y el campo de un cilindro cargado con $-Q_L$ y radio b. De esta manera el campo total es

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < a \text{ y } r > b \\ \dfrac{Q_L}{2\pi L r}\,\hat{r} & a < r < b \end{cases}$$

③

Ahora voy a calcular $\vec{E}$ recordando que en un medio lineal, isótropo y homogéneo $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ y en el caso mas general

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ (esta expresión me sirve para las regiones donde hay vacío o conozca $\vec{P}$)

$\downarrow \vec{P} = 0$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < a \text{ y } r > b \\ \dfrac{Q_L}{2\pi L \varepsilon_1 r}\hat{r} & a < r < c \\ \dfrac{Q_L}{2\pi L \varepsilon_2 r}\hat{r} & c < r < b \end{cases}$$

Ahora puedo calcular $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{P} = \begin{cases} 0 & r < a \text{ y } r > b \\ \dfrac{Q_L}{2\pi L r}\left(1 - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\hat{r} & a < r < c \\ \dfrac{Q_L}{2\pi L r}\left(1 - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)\hat{r} & c < r < b \end{cases}$$

Ahora calculo las cargas de polarización

(4)

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

$a < r < c$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{Q_L}{2\pi L r}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right) r\right] = 0 \Rightarrow \rho_p = 0$$

$c < r < b$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{Q_L}{2\pi L r}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right) r\right] = 0 \Rightarrow \rho_p = 0$$

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$$

$r = a$ $$\sigma_p = \frac{Q_L}{2\pi L a}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\hat{r}\cdot(-\hat{r}) = \cancel{\frac{Q_L}{2\pi L a}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)}$$

$$= \frac{Q_L}{2\pi L a}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1\right)$$

$r = c$

$$\sigma_p = \frac{Q_L}{2\pi L c}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\hat{r}\cdot\hat{r} + \frac{Q_L}{2\pi L c}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)\hat{r}\cdot(-\hat{r})$$

$$= \frac{Q_L}{2\pi L c}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1 + 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right) = \frac{Q_L}{2\pi L c}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)$$

$r = b$ $$\sigma_p = \frac{Q_L}{2\pi L b}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)\hat{r}\cdot\hat{r} = \frac{Q_L}{2\pi L b}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)$$

(5)

E_{max1} es el valor máximo del campo eléctrico en $a<r<c$

Recordemos que en esa región $\vec{E} = \dfrac{Q_L}{2\pi L \varepsilon_1 r}\hat{r}$

es decir que su valor máximo es

$$\frac{Q_L}{2\pi L \varepsilon_1 a} \leq E_{MAX1}$$ y por lo tanto

$$Q_L \leq E_{MAX1}\, 2\pi L \varepsilon_1 a$$

a su vez E_{MAX2} es el valor máximo del campo en $c<r<b$ y el campo eléctrico en esa región es.

$\vec{E} = \dfrac{Q_L}{2\pi L \varepsilon_2 r}\hat{r}$ y por lo tanto su valor máximo

es $\dfrac{Q_L}{2\pi L \varepsilon_2 c} \leq E_{MAX_2} \Rightarrow Q_L \leq E_{MAX2}\, 2\pi L \varepsilon_2 c$

Definimos $Q = \min\left(E_{MAX1}\, 2\pi L a \varepsilon_1,\ E_{MAX2}\, 2\pi L c \varepsilon_2\right)$
y calculamos la diferencia de tensión entre
$r=a$ y $r=b$

$$V(b)-V(a) = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_a^c \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_1 r}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr$$

$$-\int_c^b \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_2 r}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr = \frac{Q_L}{2\pi L \varepsilon_1}\ln\left(\frac{a}{c}\right) + \frac{Q_L}{2\pi L \varepsilon_2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)$$

$$= V(b) - V(a)$$