Clase 5: Desarrollo multipolar del potencial eléctrico.

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

8 de abril de 2021

Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

Lejos de cualquier configuración, el potencial eléctrico se puede expresar:

$$V(\vec{r}) = C + \frac{k\,Q_{\mathrm{total}}}{|\vec{r}|} + \frac{k\,\vec{P}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots \tag{1}$$

donde $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ y C es una constante,
Q_{total} la carga total de la configuración
$\vec{P}$ momento dipolar de la configuración de cargas.

Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

Lejos de cualquier configuración, el potencial eléctrico se puede expresar:

$$V(\vec{r}) = C + \frac{k\,Q_{\text{total}}}{|\vec{r}|} + \frac{k\,\vec{P}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots \qquad (1)$$

donde $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ y C es una constante,
Q_{total} la carga total de la configuración
$\vec{P}$ momento dipolar de la configuración de cargas.

Para una distribución de cargas puntuales:

$$Q_{\text{total}} = \sum_i q_i \qquad \vec{P} = \sum_i q_i \vec{r_i} \qquad (2)$$

Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

Para una distribución continua de cargas:

$$Q_{\text{total}} = \int_V \rho(\vec{r})dV \qquad \vec{P} = \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV \tag{3}$$

Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

Para una distribución continua de cargas:

$$Q_{\text{total}} = \int_V \rho(\vec{r})dV \qquad \vec{P} = \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV \tag{3}$$

Qué ocurre si el origen de coordenadas se desplaza?, es decir $\bar{\vec{r}} = \vec{r} + \vec{a}$?

$$\bar{\vec{P}} = \int_V \rho(\bar{\vec{r}})\bar{\vec{r}}d\bar{V}$$

Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

Para una distribución continua de cargas:

$$Q_{\text{total}} = \int_V \rho(\vec{r}) dV \qquad \vec{P} = \int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV \tag{3}$$

Qué ocurre si el origen de coordenadas se desplaza?, es decir $\vec{\bar{r}} = \vec{r} + \vec{a}$?

$$\begin{aligned} \vec{\bar{P}} &= \int_V \rho(\vec{\bar{r}}) \vec{\bar{r}} d\bar{V} \\ &= \int_V \rho(\vec{r})(\vec{r} + \vec{a}) d^3 r \end{aligned}$$

Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

Para una distribución continua de cargas:

$$Q_{\text{total}} = \int_V \rho(\vec{r})dV \qquad \vec{P} = \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV \tag{3}$$

Qué ocurre si el origen de coordenadas se desplaza?, es decir $\bar{\vec{r}} = \vec{r} + \vec{a}$?

$$\begin{aligned}
\bar{\vec{P}} &= \int_V \rho(\bar{\vec{r}})\bar{\vec{r}}d\bar{V} \\
&= \int_V \rho(\vec{r})(\vec{r} + \vec{a})d^3r \\
&= \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV + \int_V \rho(\vec{r})\,\vec{a}\,dV
\end{aligned}$$

Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

Para una distribución continua de cargas:

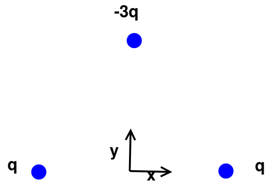
$$Q_{\text{total}} = \int_V \rho(\vec{r})dV \qquad \vec{P} = \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV \tag{3}$$

Qué ocurre si el origen de coordenadas se desplaza?, es decir $\bar{\vec{r}} = \vec{r} + \vec{a}$?

$$\begin{aligned}
\bar{\vec{P}} &= \int_V \rho(\bar{\vec{r}})\bar{\vec{r}}d\bar{V} \\
&= \int_V \rho(\vec{r})(\vec{r}+\vec{a})d^3r \\
&= \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV + \int_V \rho(\vec{r})\,\vec{a}\,dV \\
&= \vec{P} + \vec{a}Q
\end{aligned} \tag{4}$$

El momento dipolar es independiente del sistema de coordenadas sólo en el caso de que la carga total de la configuración de cargas sea nula.

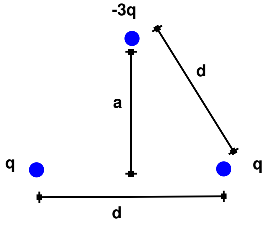
Enunciado: Como se ven de lejos las siguientes configuraciones de carga?



Para ello, vamos a calcular primero el desarrollo multipolar del potencial que nos da la expresión del mismo muy lejos de la configuración de cargas y luego derivando el potencial obtendremos el campo en el mismo límite.

El origen de coordenadas, lo situamos sobre la recta que une la posición de ambas cargas q y equidistante de ambas cargas.
La carga total es :

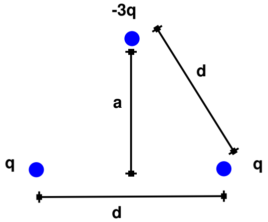
$$Q_{\text{total}} = -q$$



Vamos a calcular ahora el momento dipolar desde el centro de coordenadas elegido:

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r_i}$$

Problema 15

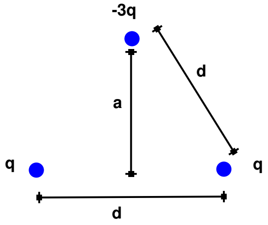


Vamos a calcular ahora el momento dipolar desde el centro de coordenadas elegido:

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r_i}$$

Por el teorema de Pitagoras inferimos $d^2 = a^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$, es decir $a = \frac{\sqrt{3}}{2}d$.

Problema 15



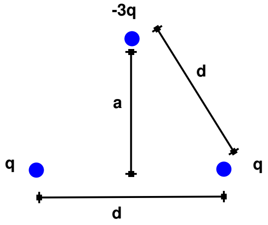
Vamos a calcular ahora el momento dipolar desde el centro de coordenadas elegido:

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r_i}$$

Por el teorema de Pitagoras
inferimos $d^2 = a^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$, es decir $a = \frac{\sqrt{3}}{2} d$.

$$\vec{P} = q(-\frac{d}{2})\,\hat{x} + q\frac{d}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} d\,(-3q)\,\hat{y}$$

Problema 15



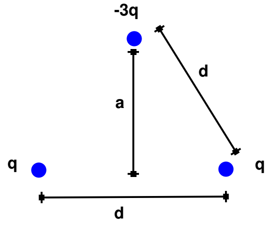
Vamos a calcular ahora el momento dipolar desde el centro de coordenadas elegido:

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r_i}$$

Por el teorema de Pitagoras
inferimos $d^2 = a^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$, es decir $a = \frac{\sqrt{3}}{2}d$.

$$\begin{aligned} \vec{P} &= q(-\frac{d}{2})\,\hat{x} + q\frac{d}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}d\,(-3q)\,\hat{y} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2}d\,q\,\hat{y} \end{aligned}$$

Problema 15



Vamos a calcular ahora el momento dipolar desde el centro de coordenadas elegido:

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r_i}$$

Por el teorema de Pitagoras
inferimos $d^2 = a^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$, es decir $a = \frac{\sqrt{3}}{2} d$.

$$\begin{aligned} \vec{P} &= q(-\frac{d}{2})\,\hat{x} + q\frac{d}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} d\,(-3q)\,\hat{y} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} d\, q\, \hat{y} \end{aligned}$$

Ahora escribimos el potencial para puntos muy lejanos:

$$V(\vec{r}) = C - \frac{k\,q}{|\vec{r}|} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,\hat{y}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots$$

Problema 15

El desarollo multipolar del potencial:

$$V(\vec{r}) \quad = \quad C - \frac{k\,q}{|\vec{r}|} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2}d\,q\,\hat{y}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots$$

Problema 15

El desarollo multipolar del potencial:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= C - \frac{k\, q}{|\vec{r}|} - \frac{k\, \frac{3\sqrt{3}}{2} d\, q\, \hat{y}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots \\
&= C - \frac{k\, q}{|\vec{r}|} - \frac{k\, \frac{3\sqrt{3}}{2} d\, q\, y}{|\vec{r}|^3} + \cdots
\end{aligned}
$$

Problema 15

El desarollo multipolar del potencial:

$$V(\vec{r}) = C - \frac{k\,q}{|\vec{r}|} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2}d\,q\,\hat{y}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots$$

$$= C - \frac{k\,q}{|\vec{r}|} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2}d\,q\,y}{|\vec{r}|^3} + \cdots$$

Calculamos ahora el campo eléctrico recordando que $\vec{E} = -\nabla V$:

$$\vec{E} = -(\frac{dV}{dx}\hat{x} + \frac{dV}{dy}\hat{y} + \frac{dV}{dz}\hat{z})$$

Problema 15

El desarollo multipolar del potencial:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= C - \frac{k\,q}{|\vec{r}|} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,\hat{y}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots \\ &= C - \frac{k\,q}{|\vec{r}|} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,y}{|\vec{r}|^3} + \cdots \end{aligned}$$

Calculamos ahora el campo eléctrico recordando que $\vec{E} = -\nabla V$:

$$\vec{E} = -(\frac{dV}{dx}\hat{x} + \frac{dV}{dy}\hat{y} + \frac{dV}{dz}\hat{z})$$

Vamos a derivar respecto de cada coordenada por separado:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{kqx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{9\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\,x}{2\;(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Problema 15

Recordando la expresión para el potencial:

$$V(\vec{r}) \;=\; C - \frac{k\,q}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2}d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Problema 15

Recordando la expresión para el potencial:

$$V(\vec{r}) \quad = \quad C - \frac{k\,q}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora E_y y E_z:

$$E_y \quad = \quad -\frac{dV}{dy} = -\frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d}{2} \times$$

Problema 15

Recordando la expresión para el potencial:

$$V(\vec{r}) = C - \frac{k\,q}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2}d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora E_y y E_z:

$$E_y = -\frac{dV}{dy} = -\frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d}{2} \times \left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right]$$

Problema 15

Recordando la expresión para el potencial:

$$V(\vec{r}) = C - \frac{k\,q}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2} d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora E_y y E_z:

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{dV}{dy} = -\frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d}{2} \times \\ & \left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right] \\ &= -\frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d}{2}\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] \end{aligned}$$

Problema 15

Recordando la expresión para el potencial:

$$V(\vec{r}) \;=\; C - \frac{k\,q}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{k\,\frac{3\sqrt{3}}{2}d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora E_y y E_z:

$$\begin{aligned}
E_y &= -\frac{dV}{dy} = -\frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d}{2}\times \\
&\quad \left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right] \\
&= -\frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d}{2}\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] \\
E_z &= -\frac{dV}{dz} = -\frac{kqz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{9\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\,z}{2\;(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos:

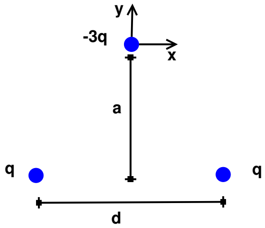
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kq\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,\hat{y}}{2\ \ |\vec{r}|^3} - \frac{9\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\vec{r}}{2\ \ |\vec{r}|^5}$$

Problema 15

Finalmente obtenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kq\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,\hat{y}}{2\ \ |\vec{r}|^3} - \frac{9\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\vec{r}}{2\ \ |\vec{r}|^5}$$

Veamos ahora como se escribe el momento dipolar $\vec{P}$ si situamos el origen de coordenadas en la posición de la carga $-3q$. LLamaremos a este punto O'



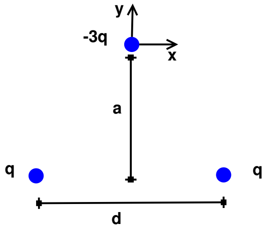
$$\vec{P}_{O'}(\vec{r}) \quad = \quad q(-\frac{d}{2}\hat{x} - a\hat{y}) + q(\frac{d}{2}\hat{x} - a\hat{y})$$

PROBLEMA 15

Finalmente obtenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kq\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,\hat{y}}{2\ \ |\vec{r}|^3} - \frac{9\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\vec{r}}{2\ \ |\vec{r}|^5}$$

Veamos ahora como se escribe el momento dipolar $\vec{P}$ si situamos el origen de coordenadas en la posición de la carga $-3q$. LLamaremos a este punto O'

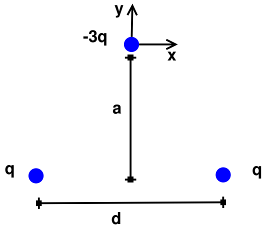


$$\begin{aligned}\vec{P}_{O'}(\vec{r}) &= q(-\frac{d}{2}\hat{x} - a\hat{y}) + q(\frac{d}{2}\hat{x} - a\hat{y}) \\ &= -2\,q\,a\,\hat{y}\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kq\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,\hat{y}}{2\ \ |\vec{r}|^3} - \frac{9\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\vec{r}}{2\ \ |\vec{r}|^5}$$

Veamos ahora como se escribe el momento dipolar $\vec{P}$ si situamos el origen de coordenadas en la posición de la carga $-3q$. LLamaremos a este punto O'

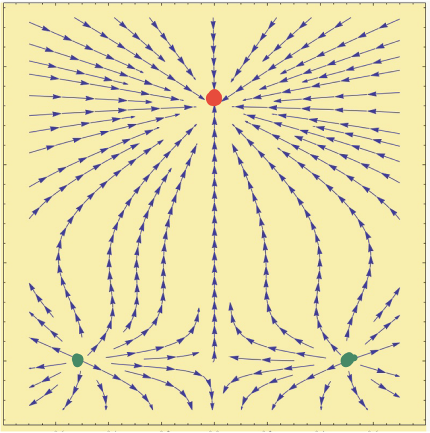


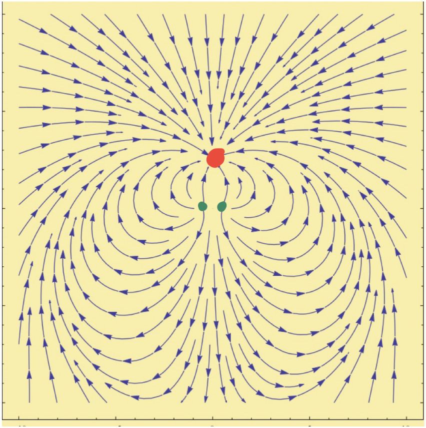
$$\begin{aligned}\vec{P}_{O'}(\vec{r}) &= q(-\frac{d}{2}\hat{x} - a\hat{y}) + q(\frac{d}{2}\hat{x} - a\hat{y}) \\ &= -2\,q\,a\,\hat{y} \\ &= -q\,\sqrt{3}\,d\,\hat{y}\end{aligned}$$

Podemos comparar este último resultado con el cálculo anterior del momento dipolar desde otro origen de coordenadas: $\vec{P} = -\frac{3\,\sqrt{3}\,q\,d}{2}\hat{y}$

Ejercicio 15

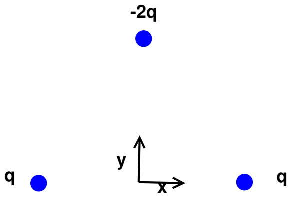
En la figura de la izquierda se ven las lineas de campo cerca de la configuración de cargas y en la figura de la derecha se muestran las lineas de campo lejos de la configuración de cargas.





Problema 15

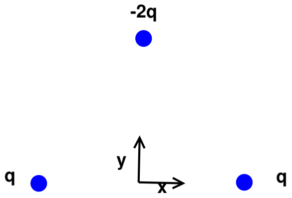
Veamos ahora la siguiente configuración de cargas:



En este caso $Q_{\text{total}} = 0$. Veamos ahora $\vec{P}$.

$$\vec{P} \;=\; q(-\frac{d}{2})\,\hat{x} + q\frac{d}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}d\,(-2q)\,\hat{y}$$

Veamos ahora la siguiente configuración de cargas:

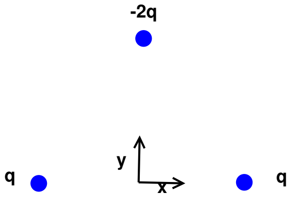


En este caso $Q_{\text{total}} = 0$. Veamos ahora $\vec{P}$.

$$\begin{aligned} \vec{P} &= q(-\frac{d}{2})\,\hat{x} + q\frac{d}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}d\,(-2q)\,\hat{y} \\ &= -\sqrt{3}d\,q\,\hat{y} \end{aligned}$$

Problema 15

Veamos ahora la siguiente configuración de cargas:



En este caso $Q_{\text{total}} = 0$. Veamos ahora $\vec{P}$.

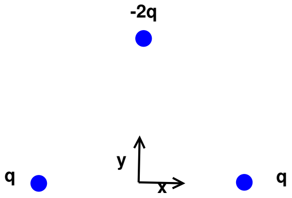
$$
\begin{aligned}
\vec{P} &= q(-\frac{d}{2})\,\hat{x} + q\frac{d}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}d\,(-2q)\,\hat{y} \\
&= -\sqrt{3}d\,q\,\hat{y}
\end{aligned}
$$

Entonces escribimos el potencial $V(\vec{r})$:

$$
V(\vec{r}) = C - \frac{k\,\sqrt{3}d\,q\,\hat{y}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots
$$

Problema 15

Veamos ahora la siguiente configuración de cargas:



En este caso $Q_{\text{total}} = 0$. Veamos ahora $\vec{P}$.

$$\begin{aligned} \vec{P} &= q(-\frac{d}{2})\,\hat{x} + q\frac{d}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}d\,(-2q)\,\hat{y} \\ &= -\sqrt{3}d\,q\,\hat{y} \end{aligned}$$

Entonces escribimos el potencial $V(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= C - \frac{k\,\sqrt{3}d\,q\,\hat{y}.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots \\ &= C - \frac{k\,\sqrt{3}d\,q\,y}{|\vec{r}|^3} + \cdots \end{aligned}$$

Problema 15

$$V(\vec{r}) \quad = \quad C - \frac{k\sqrt{3} d\, q\, y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora el campo eléctrico

$$E_x \quad = \quad -\frac{dV}{dx} = -\frac{3\sqrt{3}\, k\, q\, d\, y\, x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Problema 15

$$V(\vec{r}) = C - \frac{k\sqrt{3}d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora el campo eléctrico

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$E_y = -\frac{dV}{dy} = \sqrt{3}\,k\,q\,d \times \left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right]$$

$$V(\vec{r}) = C - \frac{k\sqrt{3}d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora el campo eléctrico

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{dV}{dx} = -\frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
E_y &= -\frac{dV}{dy} = \sqrt{3}\,k\,q\,d\,\times \\
& \left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right] \\
&= \sqrt{3}\,k\,q\,d\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right]
\end{aligned}$$

$$V(\vec{r}) \;=\; C - \frac{k\,\sqrt{3}d\,q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \cdots$$

Calculamos ahora el campo eléctrico

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{dV}{dx} = -\frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
E_y &= -\frac{dV}{dy} = \sqrt{3}\,k\,q\,d\,\times \\
& \left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right] \\
&= \sqrt{3}\,k\,q\,d\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] \\
E_z &= -\frac{dV}{dz} = -\frac{3\sqrt{3}\,k\,q\,d\,y\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}
\end{aligned}$$

Problema 15

Finalmente obtenemos

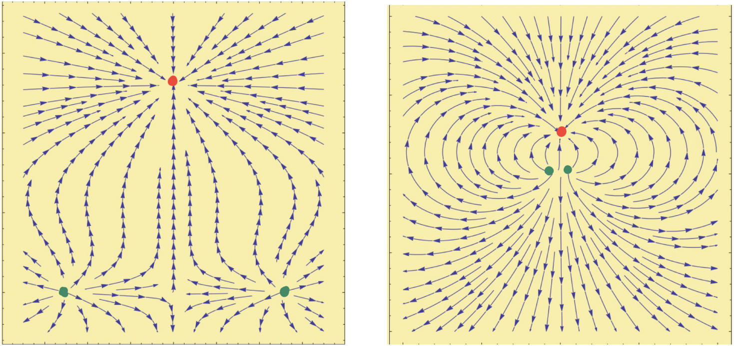
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sqrt{3}\,k\,q\,d\left[\frac{\hat{y}}{|\vec{r}|^3} - \frac{3y\vec{r}}{|\vec{r}|^5}\right]$$

Problema 15

Finalmente obtenemos

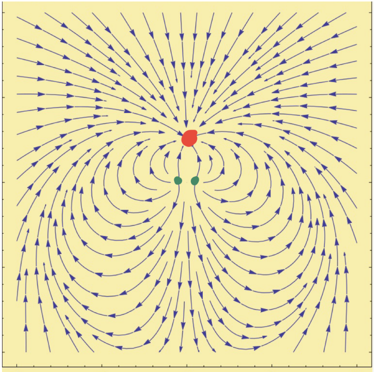
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sqrt{3}\, k\, q\, d \left[\frac{\hat{y}}{|\vec{r}|^3} - \frac{3y\vec{r}}{|\vec{r}|^5} \right]$$

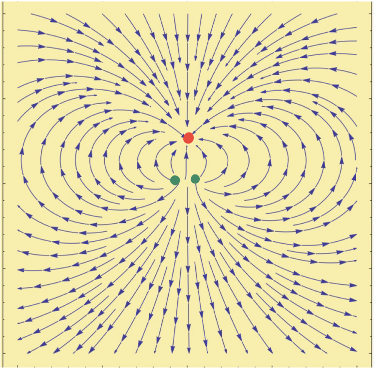
Veamos ahora las lineas de campo: Izquierda: cerca de la configuración de cargas; Derecha: lejos de la configuración de cargas.



Problema 15

Comparación de las lineas de campo vistas desde lejos de las dos configuraciones de cargas estudiadas en esta clase. Izquierda: carga negativa $= -3q$, Derecha: carga negativa $= -2q$.

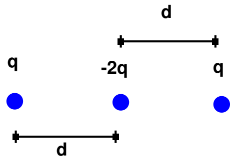




En la figura derecha se puede ver que muy lejos, el campo es igual al campo de un dipolo, es decir una carga con positiva y una carga negativa

Problema 15

Veamos ahora la siguiente configuración de cargas:

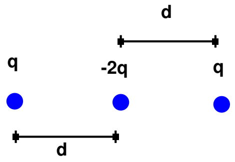


En este caso : $Q_{\text{total}} = 0$ y

$$\vec{P} = q(-\frac{d}{2})\hat{x} + q\frac{d}{2}\hat{x} = 0$$

Problema 15

Veamos ahora la siguiente configuración de cargas:



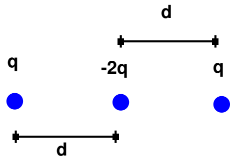
En este caso : $Q_{\text{total}} = 0$ y

$$\vec{P} = q(-\frac{d}{2})\hat{x} + q\frac{d}{2}\hat{x} = 0$$

En este caso tanto Q como $\vec{P}$ son nulos, como se escribirá el potencial? Recuerden que estamos escribiendo el desarrollo multipolar del potencial, el primer término depende de la distancia al origen de coordenadas como $\frac{Q}{r}$, el segundo término va como $\frac{|\vec{P}|}{r^2}$. Que dependencia con r tendrá el próximo término del desarrolo multipolar?

Problema 15

Veamos ahora la siguiente configuración de cargas:



En este caso : $Q_{\mathrm{total}} = 0$ y

$$\vec{P} = q(-\frac{d}{2})\hat{x} + q\frac{d}{2}\hat{x} = 0$$

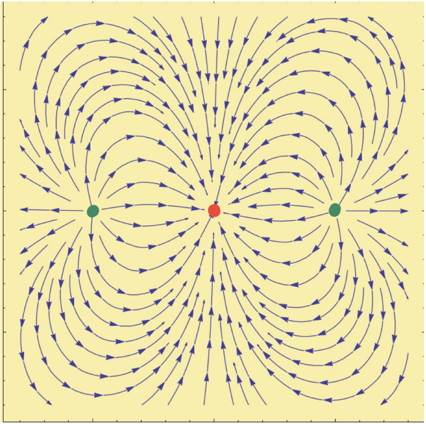
En este caso tanto Q como $\vec{P}$ son nulos, como se escribirá el potencial? Recuerden que estamos escribiendo el desarrollo multipolar del potencial, el primer término depende de la distancia al origen de coordenadas como $\frac{Q}{r}$, el segundo término va como $\frac{|\vec{P}|}{r^2}$. Que dependencia con r tendrá el próximo término del desarrolo multipolar?

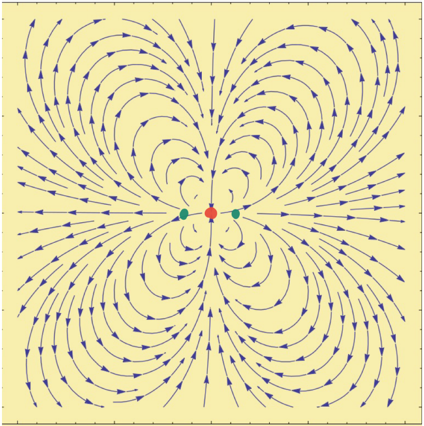
$$V(r) \sim \frac{K}{r^3}$$

y la constante K será el módulo del momento cuadripolar y lo van a estudiar en Fisica Teorica 1.

Problema 15

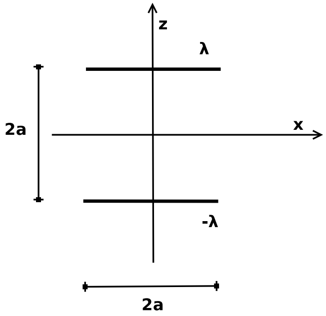
Veamos ahora las lineas de campo: Izquierda: cerca de la configuración de cargas; Derecha: lejos de la configuración de cargas.





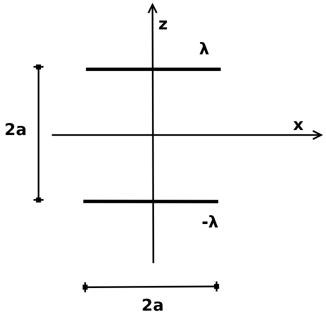
Ejercicio

Calcular la carga y el momento dipolar de la configuración de cargas de la figura:



Ejercicio

Calcular la carga y el momento dipolar de la configuración de cargas de la figura:

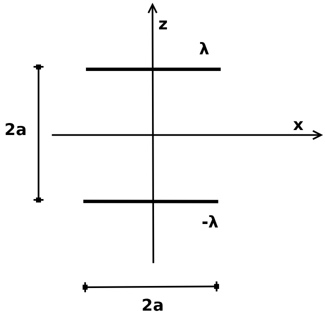


Calculamos primero la carga total:

$$Q = \int_{-a}^{a} \lambda dx + \int_{-a}^{a} (-\lambda) dx = 0 \tag{5}$$

Ejercicio

Calcular la carga y el momento dipolar de la configuración de cargas de la figura:



Calculamos primero la carga total:

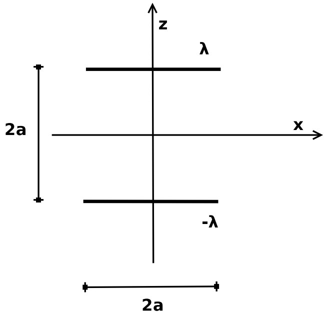
$$Q = \int_{-a}^{a} \lambda dx + \int_{-a}^{a} (-\lambda) dx = 0 \tag{5}$$

Ahora calculamos el momento dipolar $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \int \lambda \vec{r'} dl'$$

Ejercicio

Calcular la carga y el momento dipolar de la configuración de cargas de la figura:



Calculamos primero la carga total:

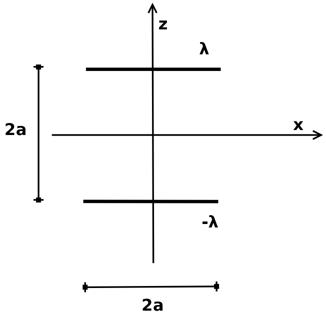
$$Q = \int_{-a}^{a} \lambda dx + \int_{-a}^{a} (-\lambda) dx = 0 \qquad (5)$$

Ahora calculamos el momento dipolar $\vec{P}$:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \int \lambda \vec{r'} dl' \\ &= \int_{-a}^{a} \lambda (x, 0, a) dx + \int_{-a}^{a} (-\lambda)(x, 0, -a) dx \end{aligned}$$

Ejercicio

Calcular la carga y el momento dipolar de la configuración de cargas de la figura:



Calculamos primero la carga total:

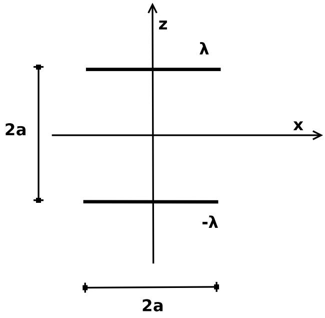
$$Q = \int_{-a}^{a} \lambda dx + \int_{-a}^{a} (-\lambda) dx = 0 \qquad (5)$$

Ahora calculamos el momento dipolar $\vec{P}$:

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= \int \lambda \vec{r'} dl' \\
&= \int_{-a}^{a} \lambda(x, 0, a) dx + \int_{-a}^{a} (-\lambda)(x, 0, -a) dx \\
&= \lambda(\frac{x^2}{2}|_{-a}^{a}, 0, 2a^2) - \lambda(\frac{x^2}{2}|_{-a}^{a}, 0, -2a^2)
\end{aligned}$$

Ejercicio

Calcular la carga y el momento dipolar de la configuración de cargas de la figura:



Calculamos primero la carga total:

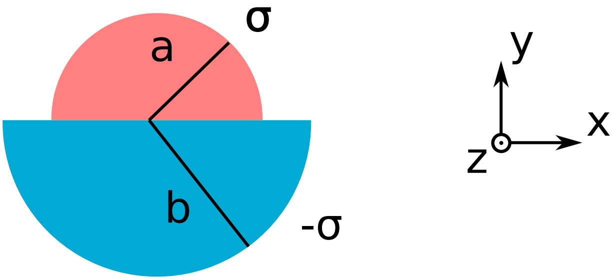
$$Q = \int_{-a}^{a} \lambda dx + \int_{-a}^{a} (-\lambda) dx = 0 \tag{5}$$

Ahora calculamos el momento dipolar $\vec{P}$:

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= \int \lambda \vec{r'} dl' \\
&= \int_{-a}^{a} \lambda(x, 0, a) dx + \int_{-a}^{a} (-\lambda)(x, 0, -a) dx \\
&= \lambda(\frac{x^2}{2}|_{-a}^{a}, 0, 2a^2) - \lambda(\frac{x^2}{2}|_{-a}^{a}, 0, -2a^2) \\
&= \lambda(0, 0, 4a^2) = 4\lambda a^2 \hat{z}
\end{aligned}$$

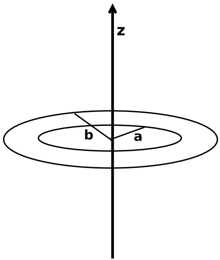
Ejercicio para hacer en casa

Se tiene una superficie formada por dos placas semicirculares (una de radio a y otra de radio b, $b > a$), cargadas con densidad superficial σ y $-\sigma$ respectivamente como se muestra en la figura. Calcular la carga y el momento dipolar:



Problema 12

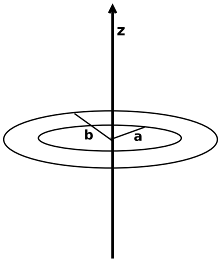
Utilizando un razonamiento similar al del Problema 10 (b), obtenga el campo eléctrico sobre el eje de un anillo de radio a, cargado uniformemente con densidad λ, partiendo del resultado para la corona circular. Recordemos que:



$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\right]\hat{z}$$

Problema 12

Utilizando un razonamiento similar al del Problema 10 (b), obtenga el campo eléctrico sobre el eje de un anillo de radio a, cargado uniformemente con densidad λ, partiendo del resultado para la corona circular. Recordemos que:



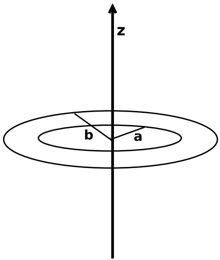
$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\right]\hat{z}$$

El límite que nos interesa es:

$$\lim_{b\to a, \sigma\to\infty} \sigma(b-a) = \lambda$$

Problema 12

Utilizando un razonamiento similar al del Problema 10 (b), obtenga el campo eléctrico sobre el eje de un anillo de radio a, cargado uniformemente con densidad λ, partiendo del resultado para la corona circular. Recordemos que:



$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\right]\hat{z}$$

El límite que nos interesa es:

$$\lim_{b\to a,\sigma\to\infty}\sigma(b-a) = \lambda$$

Primero vamos
a reescribir unos de los términos anteriores;

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{(a+(b-a))^2+z^2}}$$

Paréntesis Matemático

Recordemos el desarrollo en serie de Taylor para una función $f(x)$ alrededor de un punto x_0

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \cdots$$

donde $x - x_0$ es una cantidad pequeña.

Paréntesis Matemático

Recordemos el desarrollo en serie de Taylor para una función $f(x)$ alrededor de un punto x_0

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \cdots$$

donde $x - x_0$ es una cantidad pequeña. Para el problema que estamos estudiando queremos desarrollar:

$$\frac{1}{\sqrt{(a + (b - a))^2 + z^2}}$$

alrededor de a con $b - a$ una cantidad pequeña.

Paréntesis Matemático

Recordemos el desarrollo en serie de Taylor para una función $f(x)$ alrededor de un punto x_0

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \cdots$$

donde $x - x_0$ es una cantidad pequeña. Para el problema que estamos estudiando queremos desarrollar:

$$\frac{1}{\sqrt{(a + (b - a))^2 + z^2}}$$

alrededor de a con $b - a$ una cantidad pequeña. Podemos identificar:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

Recordemos el desarrollo en serie de Taylor para una función $f(x)$ alrededor de un punto x_0

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \cdots$$

donde $x - x_0$ es una cantidad pequeña. Para el problema que estamos estudiando queremos desarrollar:

$$\frac{1}{\sqrt{(a + (b - a))^2 + z^2}}$$

alrededor de a con $b - a$ una cantidad pequeña. Podemos identificar:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

Problema12

Calculamos las derivadas y evaluamos en $x_0 = a$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} \qquad f(a) = \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$f'(x) = -\frac{x}{(x^2+z^2)^{3/2}} \qquad f'(a) = -\frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

Problema 12

Calculamos las derivadas y evaluamos en $x_0 = a$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} \qquad f(a) = \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$f'(x) = -\frac{x}{(x^2+z^2)^{3/2}} \qquad f'(a) = -\frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{(a+(b-a))^2+z^2}} &\simeq f(a) + f'(a)(b-a) \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}}(b-a)\end{aligned}$$

Finalmente recordando la expresión del campo eléctrico de la corona circular:

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\right]\hat{z}$$

Y usando la aproximación:

$$\frac{1}{\sqrt{(a+(b-a))^2+z^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}}(b-a)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}\vec{E}(0,0,z) &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\right]\hat{z}\\ &\simeq \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{a(b-a)}{(a^2+z^2)^{3/2}}\right]\hat{z}\end{aligned}$$

Finalmente recordando la expresión del campo eléctrico de la corona circular:

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\right]\hat{z}$$

Y usando la aproximación:

$$\frac{1}{\sqrt{(a+(b-a))^2+z^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}}(b-a)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(0,0,z) &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\right]\hat{z} \\
&\simeq \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{a(b-a)}{(a^2+z^2)^{3/2}}\right]\hat{z} \\
&\simeq \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\frac{a(b-a)}{(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}
\end{aligned}$$

Problema 12

Ahora vamos a tomar el lımite cuando $b \to a$ (o lo que es lo mismo $b - a \to 0$) y $\sigma \to \infty$ de manera tal que $\lambda = \sigma(b - a)$ del campo eléctrico de la corona:

$$\begin{aligned} \vec{E}(0,0,z) &\simeq \lim_{b\to a, \sigma\to\infty} \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \frac{a(b-a)}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{z} \\ &\simeq \frac{\lambda a z}{2\epsilon_0 (a^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{z} \end{aligned}$$