

CLASE 14: MAGNETOSTÁTICA



universidad de buenos aires - exactas
departamento de Física

21 de mayo de 2021

ESQUEMA DE LA CLASE

- Fuerza de Lorentz: Fuerza entre un hilo y una cinta.
- Ley de Biot-Savart: Campo magnético de una espira circular y una espira cuadrada. Expresión del campo en el límite de grandes distancias

FUERZA DE LORENTZ

La fuerza sobre una partícula cargada con carga q en presencia de campo eléctrico \vec{E} y campo magnético magnético \vec{B} se puede escribir:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

de donde se deduce que

$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} \quad (2)$$

FUERZA DE LORENTZ

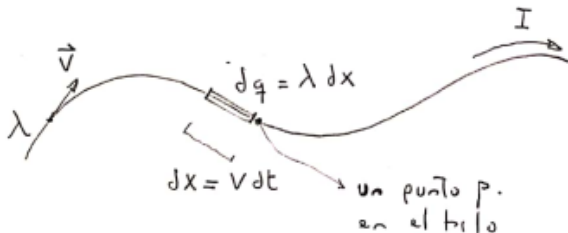
La fuerza sobre una partícula cargada con carga q en presencia de campo eléctrico \vec{E} y campo magnético \vec{B} se puede escribir:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

de donde se deduce que

$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} \quad (2)$$

En particular, si tenemos hilo de densidad λ moviéndose con velocidad \vec{v} :



Un segmento de largo $v\Delta t$, que lleva carga $\Delta q = \lambda\Delta x = \lambda v\Delta t$ atraviesa un punto P en un tiempo Δt , por lo tanto

$$I = \frac{dQ}{dt} = \lambda v \quad (4)$$

Un segmento de largo $v\Delta t$, que lleva carga $\Delta q = \lambda\Delta x = \lambda v\Delta t$ atraviesa un punto P en un tiempo Δt , por lo tanto

$$I = \frac{dQ}{dt} = \lambda v \quad (4)$$

con lo cual obtenemos:

$$d\vec{F} = \lambda dl \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} = \lambda \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} dl = I \times \vec{B}_{\text{ext}} dl \quad (5)$$

Un segmento de largo $v\Delta t$, que lleva carga $\Delta q = \lambda\Delta x = \lambda v\Delta t$ atraviesa un punto P en un tiempo Δt , por lo tanto

$$I = \frac{dQ}{dt} = \lambda v \quad (4)$$

con lo cual obtenemos:

$$d\vec{F} = \lambda dl \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} = \lambda \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} dl = I \times \vec{B}_{\text{ext}} dl \quad (5)$$

y finalmente obtenemos la fuerza sobre un hilo por el cual circula corriente I en presencia de campo magnético externo:

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}_{\text{ext}} \quad (6)$$

Un segmento de largo $v\Delta t$, que lleva carga $\Delta q = \lambda\Delta x = \lambda v\Delta t$ atraviesa un punto P en un tiempo Δt , por lo tanto

$$I = \frac{dQ}{dt} = \lambda v \quad (4)$$

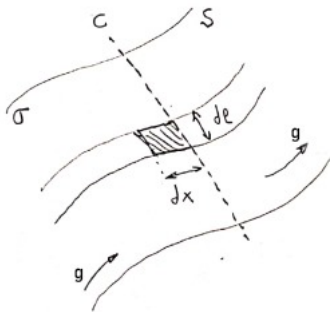
con lo cual obtenemos:

$$d\vec{F} = \lambda dl \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} = \lambda \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} dl = I \times \vec{B}_{\text{ext}} dl \quad (5)$$

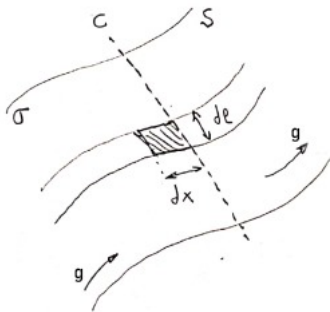
y finalmente obtenemos la fuerza sobre un hilo por el cual circula corriente I en presencia de campo magnético externo:

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}_{\text{ext}} \quad (6)$$

Veamos ahora el caso de una superficie cargada con densidad de carga σ moviéndose con velocidad \vec{v} (tangente a la superficie)



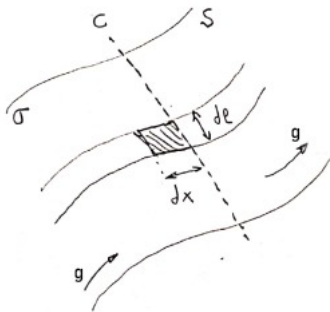
Veamos ahora el caso de una superficie cargada con densidad de carga σ moviéndose con velocidad \vec{v} (tangente a la superficie)



En un cuadrado de superficie $dxdl$:

$$dq = \sigma dxdl \quad (7)$$

Veamos ahora el caso de una superficie cargada con densidad de carga σ moviéndose con velocidad \vec{v} (tangente a la superficie)



En un cuadrado de superficie $dxdl$:

$$dq = \sigma dxdl \quad (7)$$

Consideremos una cinta de ancho dl y lados paralelos a la corriente. Se define la densidad superficial de corriente:

$$\vec{g} = \frac{d\vec{I}}{dl} = \frac{d^2Q}{dl dt} \hat{v} \quad (8)$$

A su vez, podemos escribir:

$$d\vec{I} = \frac{\sigma dx \hat{x} dl}{dt} = \sigma \vec{v} dl \quad (9)$$

A su vez, podemos escribir:

$$d\vec{I} = \frac{\sigma dx \hat{x} dl}{dt} = \sigma \vec{v} dl \quad (9)$$

y por lo tanto

$$\vec{g} = \frac{d\vec{I}}{dl} = \frac{\sigma \vec{v} dl}{dl} = \sigma \vec{v} \quad (10)$$

$$d\vec{F} = \sigma dS \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}}$$

A su vez, podemos escribir:

$$d\vec{I} = \frac{\sigma dx \hat{x} dl}{dt} = \sigma \vec{v} dl \quad (9)$$

y por lo tanto

$$\vec{g} = \frac{d\vec{I}}{dl} = \frac{\sigma \vec{v} dl}{dl} = \sigma \vec{v} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \sigma dS \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} \\ &= \vec{g} \times \vec{B}_{\text{ext}} dS \end{aligned} \quad (11)$$

A su vez, podemos escribir:

$$d\vec{I} = \frac{\sigma dx \hat{x} dl}{dt} = \sigma \vec{v} dl \quad (9)$$

y por lo tanto

$$\vec{g} = \frac{d\vec{I}}{dl} = \frac{\sigma \vec{v} dl}{dl} = \sigma \vec{v} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \sigma dS \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} \\ &= \vec{g} \times \vec{B}_{\text{ext}} dS \end{aligned} \quad (11)$$

De esta manera, la fuerza sobre una distribución de corriente en superficie \vec{g} , en presencia de un campo magnético externo se puede escribir :

$$\vec{F} = \int \vec{g} dS \times \vec{B}_{\text{ext}} \quad (12)$$

A su vez, podemos escribir:

$$d\vec{I} = \frac{\sigma dx \hat{x} dl}{dt} = \sigma \vec{v} dl \quad (9)$$

y por lo tanto

$$\vec{g} = \frac{d\vec{I}}{dl} = \frac{\sigma \vec{v} dl}{dl} = \sigma \vec{v} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \sigma dS \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} \\ &= \vec{g} \times \vec{B}_{\text{ext}} dS \end{aligned} \quad (11)$$

De de esta manera, la fuerza sobre una distribución de corriente en superficie \vec{g} , en presencia de un campo magnético externo se puede escribir :

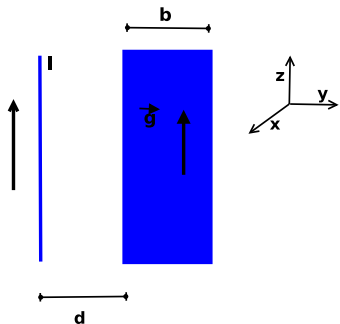
$$\vec{F} = \int \vec{g} dS \times \vec{B}_{\text{ext}} \quad (12)$$

De manera análoga si mientras que si tenemos una distribución de corriente en volumen \vec{j} :

$$\vec{F} = \int \vec{j} dV \times \vec{B}_{\text{ext}} \quad (13)$$

PROBLEMA 5

Calcular la fuerza por unidad de longitud entre una cinta infinita de ancho b por la que circula una densidad superficial de corriente \vec{g} uniforme, y un cable infinito coplanar y paralelo por el que circula una corriente I de igual sentido que \vec{g} .



$$\vec{F} = \int \vec{g} dS \times \vec{B}_{\text{hilo}}$$

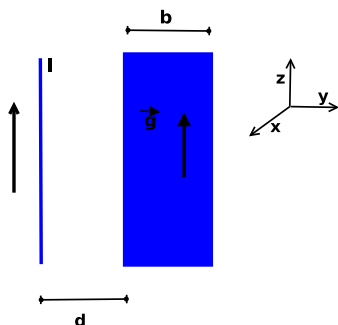
Vamos a tomar el resultado del campo del hilo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x^2 + y^2)} (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

y evaluamos el campo del hilo en el plano y-z porque tenemos que calcular el campo del hilo en la posición de la cinta, es decir $x = 0$ ($\phi = \frac{\pi}{2}$)

PROBLEMA 5

Obtenemos la expresión de campo del hilo en $x = 0$:



$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{x}$$

Se pide
la fuerza por unidad de longitud,
por lo tanto, en vez de integrar
en la superficie $dS = dydz$,
vamos a integrar solamente en dy

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_d^{d+b} g \hat{z} dy \times \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\right) \hat{x} \\ &= -\frac{\mu_0 I g}{2\pi} \int_d^{d+b} \frac{1}{y} \hat{y} \\ &= -\frac{\mu_0 I g}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b}{b}\right) \hat{y}\end{aligned}$$

LEY DE BIOT-SAVART

El campo magnético generado por una corriente estacionaria I se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (14)$$

donde

- \vec{r} es el punto campo (donde queremos calcular el campo magnético).
- \vec{r}' es el punto fuente (donde está la corriente fuente del campo magnético).
- $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ es la permeabilidad del vacío.
- Las unidades del campo magnético son los **Tesla** = $\frac{\text{N}}{\text{Am}}$.

LEY DE BIOT-SAVART

Cuando la fuente del campo magnético es una distribución de corriente en volumen \vec{j} , el campo magnético se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} dV' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (15)$$

mientras que si la fuente del campo magnético es una distribución de corriente en superficie \vec{g} :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{g} dS' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (16)$$

PROBLEMA 6

Calcular el campo magnético sobre el eje de una espira circular de área A y corriente I . El radio de la espira es $a = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

Vamos

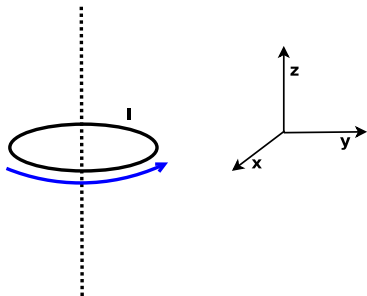
a usar la Ley de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

- $\vec{r} = (0, 0, z) = z\hat{z}$
- $\vec{r}' = (a \cos \phi, a \sin \phi, 0) = a\hat{r}$
- $d\vec{l}' = a d\phi \hat{\phi}$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') &= a d\phi \hat{\phi} \times (z\hat{z} - a\hat{r}) \\ &= a z d\phi \hat{r} + a^2 d\phi \hat{z} \end{aligned}$$



PROBLEMA 6

$$\vec{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I(a z d\phi \hat{r} + a^2 d\phi \hat{z})}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Recordemos que $\hat{r} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ y que $\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0$, entonces obtenemos el campo de una espira circular sobre el eje z:

$$\vec{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a^2 d\phi \hat{z}}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

PROBLEMA 6

Veamos ahora cuál es la expresión a la cual podemos aproximar el campo magnético para distancias grandes, es decir $z \gg a$. Podemos escribir

$$\vec{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3(1 + \frac{a^2}{z^2})^{3/2}} \hat{z}$$

LLamando $x = \frac{a}{z}$, vamos a hacer un desarrollo de Taylor de la función $f(x) = (1 + x^2)^{-3/2}$ alrededor de $x_0 = 0$ y con $x - x_0 = \epsilon = \frac{a}{z}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x^2)^{-3/2} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -3x(1 + x^2)^{-5/2} & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= 15x(1 + x^2)^{-7/2} - 3(1 + x^2)^{-5/2} & f''(0) &= -3 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $(1 + x^2)^{-3/2} \simeq 1 - \frac{3}{2}\epsilon^2$:

$$\frac{1}{(1 + \frac{a^2}{z^2})^{3/2}} \simeq 1 - \frac{3}{2} \frac{a^2}{z^2}$$

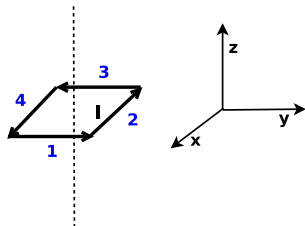
PROBLEMA 6

$$\begin{aligned}\vec{B}(0, 0, z) &= \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \left(1 - \frac{3a^2}{2z^2}\right) \hat{z} \\ &\simeq \frac{\mu_0 I A}{2\pi z^3} \left(1 - \frac{3a^2}{2z^2}\right) \hat{z}\end{aligned}$$

donde recordemos que A es el área de la espira.

PROBLEMA 6

Calcular el campo magnético sobre el eje de una espira cuadrada de lado D y corriente I .



La idea es aplicar la ley de Biot-Savart en cada uno de los lados de la espira cuadrada, recorriéndola en sentido antihorario. En clase solo calcularemos dos segmentos (lados 1 y 3), pero las cuentas son análogas para los otros dos (hacer de tarea para fijar ideas!).

PROBLEMA 6

Empecemos por el lado 1, donde tenemos:

- $\vec{r} = (0, 0, z)$
- $\vec{r}' = (\frac{D}{2}, y', 0)$
- $d\vec{l}' = dy' \hat{y}$

$$\vec{B}_1(0, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-D/2}^{D/2} \frac{I dy' \hat{y} \times (-\frac{D}{2}, -y', z)}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2 \right]^{3/2}}$$

PROBLEMA 6

Haciendo el producto vectorial obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{B}_1(0, 0, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-D/2}^{D/2} \frac{I \frac{D}{2} dy' \hat{z}}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2 \right]^{3/2}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-D/2}^{D/2} \frac{I z dy' \hat{x}}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2 \right]^{3/2}}}_A \\ &= \frac{\mu_0 D I}{8\pi} \frac{y' \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right] \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2}} \Big|_{-D/2}^{D/2} + A\end{aligned}$$

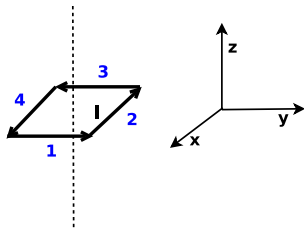
PROBLEMA 6

$$\vec{B}_1(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \frac{D^2 \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}} + A$$

Vamos a aplicar la ley de Biot-Savart al lado 3, donde tenemos:

- $\vec{r} = (0, 0, z) = z\hat{z}$
- $\vec{r}' = \left(-\frac{D}{2}, y', 0\right)$
- $d\vec{l}' = dy'\hat{y}$

$$\vec{B}_3(0, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D/2}^{-D/2} \frac{I dy' \hat{y} \times \left(\frac{D}{2}, -y', z\right)}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}}$$



PROBLEMA 6

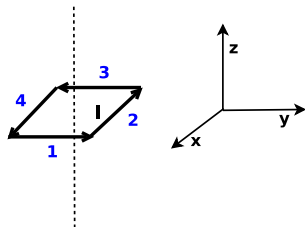
$$\vec{B}_3(0, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D/2}^{-D/2} \frac{I dy' \hat{y} \times \left(\frac{D}{2}, -y', z\right)}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

Resolviendo el producto vectorial obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{B}_3(0, 0, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D/2}^{-D/2} \frac{I\left(-\frac{D}{2}\right) dy' \hat{z}}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}} \\ &+ \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D/2}^{-D/2} \frac{I z dy' \hat{x}}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}}}_C \\ &= \frac{\mu_0 D I}{8\pi} \frac{-y' \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right] \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2}} \Big|_{D/2}^{-D/2} + C \end{aligned}$$

PROBLEMA 6

$$\vec{B}_3(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \frac{D^2 \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}} + C$$



El campo total será la suma del campo generado por cada segmento. Se puede ver que $A + C = 0$. O sea, solo sobrevive la componente z del campo. Por simetra, en los lados **2** y **4** pasa lo mismo ($B_{24} = B_{13}$). Por lo tanto, el campo magnético total de la espira cuadrada es: $B_T = 2B_{13}$

$$\vec{B}_T(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{D^2 \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}}$$

PROBLEMA 6

Veamos ahora la expresión del campo magnético para distancias grandes, es decir $z \gg D$. Podemos escribir:

$$\begin{aligned}\vec{B}_T(0, 0, z) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{D^2 \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I D^2}{2\pi z^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{D^2}{4z^2}\right) \sqrt{1 + \frac{D^2}{2z^2}}}\end{aligned}$$

PROBLEMA 6

Veamos ahora la expresión del campo magnético para distancias grandes, es decir $z \gg D$. Podemos escribir:

$$\begin{aligned}\vec{B}_T(0, 0, z) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{D^2 \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I D^2}{2\pi z^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{D^2}{4z^2}\right) \sqrt{1 + \frac{D^2}{2z^2}}}\end{aligned}$$

a orden 0 podemos considerar $\frac{D}{z} = 0$ y obtenemos:

$$\vec{B}_T(0, 0, z) \simeq \frac{\mu_0 I D^2}{2\pi z^3} \hat{z} = \frac{\mu_0 I A}{2\pi z^3} \hat{z}$$

donde A es el área de la espira. Y podemos ver que a orden 0 coincide la expresión para la espira cuadrada y para la espira circular.