

# CLASE 16: MOMENTO DIPOLAR MAGNÉTICO Y LEY DE FARADAY



universidad de buenos aires - exactas  
departamento de física

21 de junio de 2021

# ESQUEMA DE LA CLASE DE HOY

- Momento dipolar magnético
- Ley de Faraday
- Ley de Lenz

# MOMENTO DIPOLAR MAGNÉTICO

Similar al caso electrostático, en magnetostática se puede hacer una expansión multipolar en el potencial vector  $\vec{A}$  donde  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Esta expansión no posee término monopolar y es un poco más complicada ya que  $\vec{A}$  es un vector y no un escalar como el potencial eléctrico  $V$ .

El primer término en la expansión es el dipolar

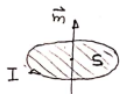
$$\vec{A} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \dots \quad (1)$$

donde  $\vec{m}$  es el dipolo magnético

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times Id\vec{\ell}' \quad (2)$$

# CAMPO DE UN DIPOLO MAGNÉTICO IDEAL

Se define un dipolo magnético ideal de la siguiente manera:



$$\lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty}} I \vec{S} = \vec{m} \quad (3)$$

El campo  $\vec{A}$  de un dipolo ideal situado en  $\vec{r}_0$  se puede escribir

$$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad (4)$$

y a partir de la relación  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  se obtiene el campo magnético de un dipolo ideal situado en  $\vec{r}_0$ :

$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0))(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \right] \quad (5)$$

# CAMPO DE UN DIPOLO MAGNÉTICO IDEAL

Si el dipolo está situado en el origen  $\vec{r}_0 = 0$ , entonces

$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}) \quad (6)$$

## PROBLEMA 6: MOMENTO MAGNÉTICO

Calculemos el momento magnético de una espira tanto circular como cuadrada.

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times I d\vec{\ell}' \quad (7)$$

En el caso de la espira circular de radio  $a$   $\vec{r}' = a \hat{\rho} = a(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, 0)$  y  $d\vec{\ell}' = (a d\phi) \hat{\phi}$ , donde estamos usando coordenadas cilíndricas  $\{\rho, \phi, z\}$

$$\vec{m}_{\circ} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \hat{\rho}) \times (I a d\phi \hat{\phi}) = \frac{1}{2} I 2\pi a^2 \hat{z} = I \pi a^2 \hat{z} = I A_{\circ} \hat{z} \quad (8)$$

¿Cómo aparece esta expresión en el campo de la espira circular? ¿Es la espira circular un dipolo magnético puro?

Recordando la expresión para  $\vec{B}$  en el eje  $z$  de la espira para distancias grandes ( $z \gg a$ ) hallada en la Clase 14

$$\vec{B}(z) \Big|_{\text{eje } z} \simeq \frac{\mu_0 I A_{\circ}}{2\pi z^3} \left( 1 - \frac{3a^2}{2z^2} \right) \quad (9)$$

Si reemplazamos la expresión del momento dipolar hallado  $\vec{m}_{\circ} = I A_{\circ} \hat{z}$  en  $\vec{B}$  obtenemos que

$$\vec{B}(z) \Big|_{\text{eje } z} \simeq \frac{\mu_0 m_{\circ}}{2\pi z^3} \left( 1 - \frac{3a^2}{2z^2} \right) \quad (10)$$

Pero la expresión del campo magnético de un dipolo ideal es

$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}) \quad (11)$$

Si consideramos el campo de un dipolo

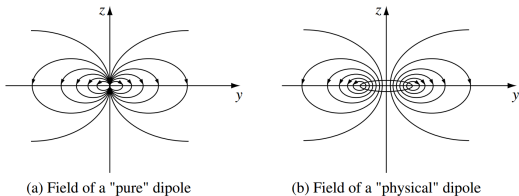
$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}) \quad (12)$$

para el caso  $\vec{m} = m\hat{z}$  sobre el eje  $z$  (donde  $\hat{r}$  coincide con  $\hat{z}$ ), la expresión anterior se reduce a

$$\vec{B}_{\text{dip}}(z) \Big|_{\text{eje } z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{z^3} 2m\hat{z} \quad (13)$$

coincidiendo con el primer término relevante de la expansión para  $z$  grande de la espira es

$$\vec{B}(z) \Big|_{\text{eje } z} \simeq \frac{\mu_0 m_0}{2\pi z^3} \quad (14)$$



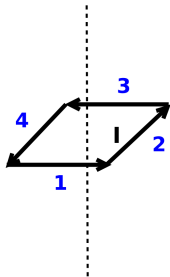
(Griffiths)



Ahora veamos el caso de la espira cuadrada

$$\vec{m}_{\square} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times I d\vec{\ell}' \quad (15)$$

En el caso de la espira cuadrada hay que dividir la integral en cuatro partes



$$\begin{aligned} \vec{m}_{\square} &= \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times I d\vec{\ell}' \\ &= \int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4 \\ &= 4 \int_1 = 4 \frac{1}{2} \int_{\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \left(-\frac{D}{2}, y', 0\right) \times I dy' \hat{y} \\ &= 2I \frac{D}{2} D \hat{z} = ID^2 \hat{z} \\ &= I A_{\square} \hat{z} = \vec{m}_{\square} \end{aligned}$$

Comparando los campos de las espiras circular y cuadrada para distancias grandes

$$\vec{B}(z)\Big|_{\text{eje } z} \simeq \frac{\mu_0 m_{\circ}}{2\pi z^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a^2}{z^2}\right) \quad (16)$$

$$\vec{B}(z)\Big|_{\text{eje } z} \simeq \frac{\mu_0 m_{\square}}{2\pi z^3} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{D^2}{z^2}\right) \quad (17)$$

Vemos que a orden 0 ambos campos son iguales al campo de un dipolo ideal.

Finalmente, recordemos la expresión de la fuerza que ejerce un campo magnético externo  $\vec{B}$  sobre un dipolo  $\vec{m}$ :

$$\vec{F} = \left(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{B} \quad (18)$$

y la expresión para el torque sobre un dipolo ideal en un campo magnético uniforme:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (19)$$

# LEY DE FARADAY

Se define la fuerza electromotriz (f.e.m) en un circuito

$$\epsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (20)$$

En el caso de que los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  sean estáticos, esta f.e.m es siempre 0. Faraday realizó una serie de experimentos, de los cuales infirió que:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

donde  $\Phi = \int \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$  es el flujo de campo magnético y por lo tanto se puede escribir:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (21)$$

# LEY DE FARADAY

Se define la fuerza electromotriz (f.e.m) en un circuito

$$\epsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (20)$$

En el caso de que los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  sean estáticos, esta f.e.m es siempre 0. Faraday realizó una serie de experimentos, de los cuales infirió que:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

donde  $\Phi = \int \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$  es el flujo de campo magnético y por lo tanto se puede escribir:

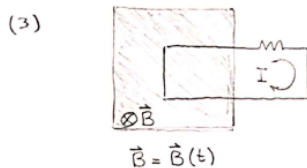
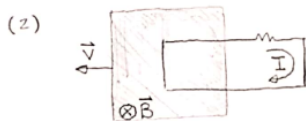
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (21)$$

$$\int \int \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (22)$$

con lo cual finalmente se obtiene la Ley de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

# EXPERIMENTOS DE FARADAY



# CÁLCULO DE LA FUERZA ELECTROMOTRIZ (F.E.M)

- El caso en que la f.e.m. está generada por la fuerza magnética:

$$\epsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

**Ejemplo: barra conductora con velocidad  $\vec{v}$  perpendicular a un campo magnético.**

- El caso en que la f.e.m está generada por un flujo de campo magnético variable en el tiempo, lo cual puede deberse a i) que el campo magnético varíe con el tiempo o bien ii) la superficie que está atravesando el campo magnético se modifica con el tiempo. En ambos casos:

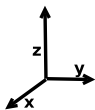
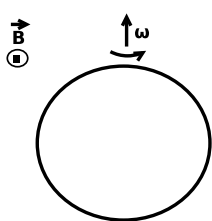
$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

**Ejemplo: Espira en un campo magnético variable en el tiempo, Circuito estático en presencia de una fuente de campo magnético que se mueve con velocidad  $\vec{v}$  perpendicular al mismo.**

## PROBLEMA 1

Una espira circular de  $100 \text{ cm}^2$  de área está colocada en un campo magnético uniforme de  $0,01 \text{ T}$  y rota  $10$  veces por segundo en torno de uno de sus diámetros que es normal a la dirección del campo. Calcular:

- 1 La f.e.m. inducida en la espira, en función del tiempo  $t$  y en particular cuando su normal forma un ángulo de  $45^\circ$  con el campo
- 2 La f.e.m. máxima y mínima y los valores de  $t$  para que aparezcan estas f.e.m.



$$\vec{B} = B_0 \hat{x}$$

$$B_0 = 0,01 \text{ T}$$

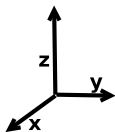
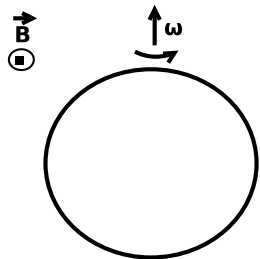
$$R = \sqrt{\frac{100 \text{ cm}^2}{\pi}}$$

$$\omega = 2\pi \cdot 10 \text{ seg}^{-1}$$



# PROBLEMA 1

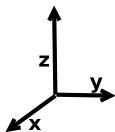
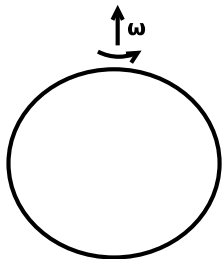
Este caso corresponde a un campo magnético estático que está atravesando una superficie variable con el tiempo.



$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

# PROBLEMA 1

Este caso corresponde a un campo magnético estático que está atravesando una superficie variable con el tiempo.



$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

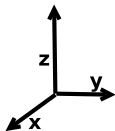
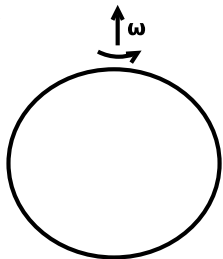
La mejor manera de describir la superficie variable es mediante un sistema solidario a la espira y considerando coordenadas cilíndricas:

$$\vec{S} = \pi R^2 \hat{\rho}$$

donde  $\hat{\rho} = (\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$ .

## PROBLEMA 1

Este caso corresponde a un campo magnético estático que está atravesando una superficie variable con el tiempo.



$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

La mejor manera de describir la superficie variable es mediante un sistema solidario a la espira y considerando coordenadas cilíndricas:

$$\vec{S} = \pi R^2 \hat{\rho}$$

donde  $\hat{\rho} = (\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$ . Y de esta manera calculamos el flujo de  $\vec{B}$ :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B_0 \hat{x} \cdot \pi R^2 \hat{\rho} = B_0 \pi R^2 \cos \omega t$$

## PROBLEMA 1

De esta manera podemos calcular la f.e.m:

$$\epsilon(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} B_0 \pi R^2 \cos \omega t = B_0 \omega \pi R^2 \sin \omega t$$

Cuando la normal a la espira forma un ángulo de 45 con el campo,

$$\hat{\rho} \cdot \hat{x} = \cos \omega t = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto la f.e.m. correspondiente resulta:

$$\epsilon = B_0 \omega \pi R^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 44,4 \text{ T cm}^2 \text{ seg}^{-1} = 4,44 \times 10^{-3} \text{ T m}^2 \text{ seg}^{-1}$$

Recordemos que  $1 \text{ T} = \text{N m}^{-1} \text{ A}^{-1}$  y por lo tanto obtenemos:

$$\epsilon = 4,44 \times 10^{-3} \text{ N m A}^{-1} \text{ seg}^{-1} = 4,44 \times 10^{-3} \text{ J C}^{-1} = 4,44 \times 10^{-3} \text{ V}$$

# LEY DE LENZ

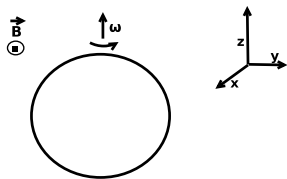
Habíamos visto que

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

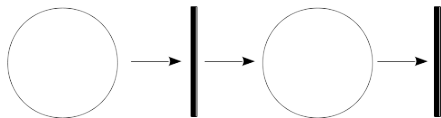
pero a veces no es obvio generar una intuición sobre el sentido de la corriente inducida por la f.e.m.. La ley de Lenz establece una regla que nos permite anticipar el sentido de la corriente inducida a partir de la f.e.m. dada por la ley de Faraday.

**Ley de Lenz:** La corriente inducida por la f.e.m. se opone al cambio de flujo sobre un lazo cerrado.

# LEY DE LENZ (PROBLEMA 1)



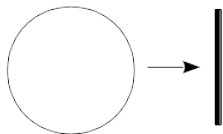
## Problema 1



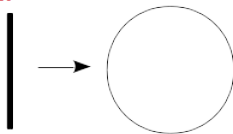
# LEY DE LENZ (PROBLEMA 1)

$B_0$  

I.

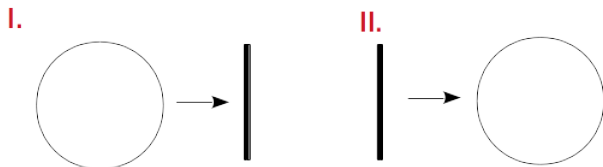


II.



# LEY DE LENZ (PROBLEMA 1)

B0 



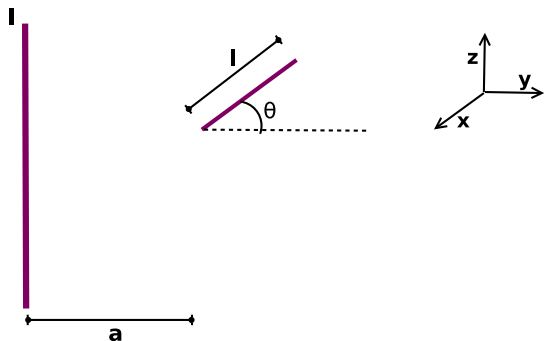
I) El flujo en la espira disminuye, por lo que se induce una corriente de forma tal que se compense esa disminución del flujo. O sea, se genera una corriente en sentido **antihorario** si miramos la espira "de frente".

II) El flujo en la espira aumenta, por lo que se induce una corriente de forma tal que se compense el aumento del flujo. Esto es, se genera una corriente en sentido **horario** si miramos la espira "de frente".



## PROBLEMA 5

Un cable rectilíneo muy largo, conduce una corriente de  $1\text{ A}$ . A  $1\text{ m}$  del cable se encuentra el extremo de una aguja de  $20\text{ cm}$  de largo que gira en torno de ese extremo en el plano del cable, con una velocidad angular  $\omega = 20\text{ seg}^{-1}$ , como se muestra en la figura. Calcular la f.e.m. inducida entre los extremos de la aguja, como función del tiempo.



Este problema corresponde al caso en que la f.e.m. inducida es producida por una fuerza magnética.

$$\epsilon = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

donde los límites de la integral son los extremos de la aguja.

## PROBLEMA 5

Ahora vamos a calcular la velocidad, recordemos que en este caso  $\vec{r}$  tiene que describir todos los puntos de la aguja



$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= \omega \hat{x} \times (a + l \cos \theta) \hat{y} + l \sin \theta \hat{z}\end{aligned}$$

## PROBLEMA 5

Ahora vamos a calcular la velocidad, recordemos que en este caso  $\vec{r}$  tiene que describir todos los puntos de la aguja



$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= \omega \hat{x} \times (a + l \cos \theta) \hat{y} + l \sin \theta \hat{z} \\ &= \omega [(a + l \cos \theta) \hat{z} - \omega l \sin \theta \hat{y}]\end{aligned}$$

donde  $l$  toma valores entre 0 y  $b = 20$  cm y  $\theta = \omega t$ .

## PROBLEMA 5

Ahora vamos a calcular la velocidad, recordemos que en este caso  $\vec{r}$  tiene que describir todos los puntos de la aguja



$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= \omega \hat{x} \times (a + l \cos \theta) \hat{y} + l \sin \theta \hat{z} \\ &= \omega [(a + l \cos \theta) \hat{z} - \omega l \sin \theta \hat{y}]\end{aligned}$$

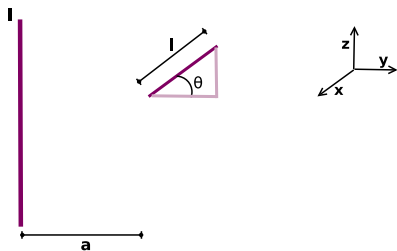
donde  $l$  toma valores entre  $0$  y  $b = 20$  cm y  $\theta = \omega t$ . Recordemos la expresión del campo magnético de un hilo con corriente  $I$ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

En el plano donde gira la aguja (plano  $y$ - $z$ ,  $\phi = \frac{\pi}{2}$ )  $\Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{x}$

## PROBLEMA 5

A continuación calculamos  $\vec{v} \times \vec{B}$  pero teniendo cuidado de evaluar  $\vec{B}$  en la posición de la aguja  $\vec{r}_a = (a + l \cos \theta)\hat{y} + l \sin \theta \hat{z}$  :



Recordando la expresión para  $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{x}$  en el plano y-z, tenemos:

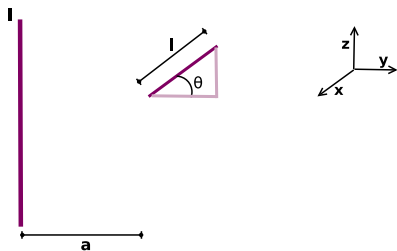
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(a + l \cos \theta)} \hat{x}$$

De esta manera, se obtiene:

$$\vec{v} \times \vec{B} = [\omega(a + l \cos \theta) \hat{z} - \omega l \sin \theta \hat{y}] \times \left[ \frac{-\mu_0 I}{2\pi(a + l \cos \theta)} \right] \hat{x}$$

## PROBLEMA 5

A continuación calculamos  $\vec{v} \times \vec{B}$  pero teniendo cuidado de evaluar  $\vec{B}$  en la posición de la aguja  $\vec{r}_a = (a + l \cos \theta)\hat{y} + l \sin \theta \hat{z}$  :



Recordando la expresión para  $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{x}$  en el plano y-z, tenemos:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(a + l \cos \theta)} \hat{x}$$

De esta manera, se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{B} &= [\omega(a + l \cos \theta) \hat{z} - \omega l \sin \theta \hat{y}] \times \left[ \frac{-\mu_0 I}{2\pi(a + l \cos \theta)} \right] \hat{x} \\ &= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi(a + l \cos \theta)} [(a + l \cos \theta)\hat{y} + l \sin \theta \hat{z}] \end{aligned}$$

donde  $a = 1 \text{ m}$ ,  $l$  toma valores entre  $0$  y  $b = 20 \text{ cm}$ .

## PROBLEMA 5

Finalmente entonces podemos calcular la f.e.m.

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_0^b -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ \hat{y} + \frac{l \operatorname{sen} \theta}{a + l \cos \theta} \hat{z} \right] \cdot dl (\cos \theta \hat{y} + \operatorname{sen} \theta \hat{z})\end{aligned}$$

## PROBLEMA 5

Finalmente entonces podemos calcular la f.e.m.

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_0^b -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ \hat{y} + \frac{l \operatorname{sen} \theta}{a + l \cos \theta} \hat{z} \right] \cdot dl (\cos \theta \hat{y} + \operatorname{sen} \theta \hat{z}) \\ &= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \int_0^b \left[ \cos \theta + \frac{l \operatorname{sen}^2 \theta}{a + l \cos \theta} \right] dl\end{aligned}$$



## PROBLEMA 5

Finalmente entonces podemos calcular la f.e.m.

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_0^b -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ \hat{y} + \frac{l \operatorname{sen} \theta}{a + l \cos \theta} \hat{z} \right] \cdot dl (\cos \theta \hat{y} + \operatorname{sen} \theta \hat{z}) \\ &= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \int_0^b \left[ \cos \theta + \frac{l \operatorname{sen}^2 \theta}{a + l \cos \theta} \right] dl \\ &= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ l \cos \theta + \frac{l}{\cos \theta} - \frac{a \log(a + l \cos \theta)}{\cos^2 \theta} \right] \Big|_0^b\end{aligned}$$

## PROBLEMA 5

Finalmente entonces podemos calcular la f.e.m.

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_0^b -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ \hat{y} + \frac{l \operatorname{sen} \theta}{a + l \cos \theta} \hat{z} \right] \cdot dl (\cos \theta \hat{y} + \operatorname{sen} \theta \hat{z}) \\ &= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \int_0^b \left[ \cos \theta + \frac{l \operatorname{sen}^2 \theta}{a + l \cos \theta} \right] dl \\ &= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ l \cos \theta + \frac{l}{\cos \theta} - \frac{a \log(a + l \cos \theta)}{\cos^2 \theta} \right] \Big|_0^b \\ &= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ b \cos \theta + \frac{b}{\cos \theta} - \frac{a \log(a + b \cos \theta)}{\cos^2 \theta} + \frac{a \log a}{\cos^2 \theta} \right]\end{aligned}$$

## PROBLEMA 5

Finalmente entonces podemos calcular la f.e.m.

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_0^b -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ \hat{y} + \frac{l \operatorname{sen} \theta}{a + l \cos \theta} \hat{z} \right] \cdot dl (\cos \theta \hat{y} + \operatorname{sen} \theta \hat{z}) \\ &= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \int_0^b \left[ \cos \theta + \frac{l \operatorname{sen}^2 \theta}{a + l \cos \theta} \right] dl \\ &= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ l \cos \theta + \frac{l}{\cos \theta} - \frac{a \log(a + l \cos \theta)}{\cos^2 \theta} \right] \Big|_0^b \\ &= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ b \cos \theta + \frac{b}{\cos \theta} - \frac{a \log(a + b \cos \theta)}{\cos^2 \theta} + \frac{a \log a}{\cos^2 \theta} \right] \\ &= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ b \cos \omega t + \frac{b}{\cos \omega t} - \frac{a}{\cos^2 \omega t} \log\left(1 + \frac{b}{a} \cos \omega t\right) \right]\end{aligned}$$