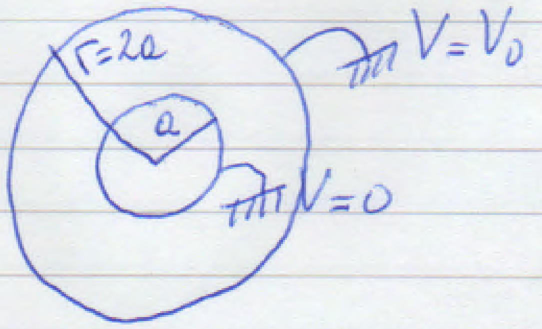
# Problema 2 (tema 1)

Potencial de una cáscara esférica de radio R

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & r < R \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > 0 \end{cases}$$

El potencial siempre está definido a menos de una constante




Calculo el potencial total x superposición.

$$V(\vec{r}) \begin{cases} \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \dfrac{Q_2}{8\pi\varepsilon_0 a} & r < a \\[2ex] \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{Q_2}{8\pi\varepsilon_0 a} & a < r < 2a \\[2ex] \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > 2a \end{cases}$$

$$V(r=a)=0 \qquad \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{Q_2}{8\pi\varepsilon_0 a}=0 \Rightarrow Q_1=-\frac{Q_2}{2}$$

$$V(r=2a)=V_0 \qquad \frac{Q_1+Q_2}{8\pi\varepsilon_0 a}=V_0 .$$

$$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(-\frac{Q_2}{2}+Q_2\right)=V_0$$

$$Q_2 = 16\pi\varepsilon_0 a V_0$$

$$Q_1 = -8\pi\varepsilon_0 a V_0 .$$



otra manera de resolver el item a

$$V(r)=\begin{cases} A & r<a \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+B & a<r<2a \\ \dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}+C & r>2a \end{cases}$$

Además se tiene que cumplir

$$V(r=a)=0$$
$$V(r=2a)=V_0$$

y el potencial tiene que ser continuo en $r=2a$ y en $r=a$ $\longrightarrow$ Tengo 4 ecuaciones y 5 incógnitas $\Rightarrow A, B, C, Q_1, Q_2$

Tengo ~~4~~ 4 ecuaciones y 5 incógnitas.
Pero como el potencial siempre está definido a menos de una constante, puedo fijar arbitrariamente el valor de una constante.
Por ejemplo $C = 0$.

b) Cuando se desconectan las baterías, las cargas en las esferas son $Q_1$ y $Q_2$ calculadas en a)
Tenemos 3 regiones

i) $\varepsilon = \varepsilon_0 \qquad 0 < r \leq 2a$
ii) $\varepsilon = \varepsilon_1 \qquad a < r < 3a$
iii) el medio NO es LIH y $\vec{P} = A r \hat{r} \qquad r > 3a$

Para $0 < r < 3a$ como el medio es LIH

$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ (para $0 < r < 2a$ $\chi = 0$)

y por lo tanto $\vec{\nabla} \times \vec{P} = 0 = \vec{\nabla} \times \vec{D}$

Para $r > 3a$ $\quad \vec{P} = A r \hat{r}$

calculamos $\nabla \times (A r \hat{r}) = 0$

Hay que probar además que $\vec{P} \times \hat{n} \Big|_{r=3a} = 0$

$A(3a)\hat{r} \cdot (-\hat{r}) = 0$

$(-\hat{r}) \Rightarrow$ normal exterior al dielect.

Por lo tanto las ecuaciones para $\vec{D}$ en todo el espacio son:

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_L$$

y podemos usar la ley de Gauss para calcular $\vec{D}$.

También debido a la simetría esférica del problema, sabemos que $\vec{D} = D(r)\,\hat{r}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D(r)\,\hat{r}\cdot\hat{r}\, r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta\, d\varphi = Q_{Lenc}$$

$$Q_{Lenc} = \begin{cases} 0 & r < a \\ Q_1 & a < r < 2a \\ Q_1 + Q_2 & r > 2a \end{cases}$$

$$\vec{D}(\vec{r}) \begin{cases} 0 & r < a \\ \dfrac{Q_1}{4\pi r^2}\,\hat{r} & a < r < 2a \\ \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi r^2}\,\hat{r} & r > 3a \end{cases}$$

Para $0 < r < 3a$ el medio es LIH

y podemos usar $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ para calcular $\vec{E}$.

En $r > 3a$ $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D} - \vec{P}}{\varepsilon_0}$$

De esta manera obtenemos

5

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r} & a < r < 2a \\ \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\,\hat{r} & 2a < r < 3a \\ \left(\dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \dfrac{A r}{\varepsilon_0}\right)\hat{r} & r > 3a \end{cases}$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < 2a \\ \dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi r^2}\left(1 - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\hat{r} & 2a < r < 3a \\ A r \hat{r} & r > 3a \end{cases}$$

c) cargas de polarización en volumen y superficie

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

para $r > 3a$ $\quad \vec{P} = A r \hat{r}$

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right)$$

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -3A$$

$$r = 2a$$

$$\sigma_p = P\cdot\hat{n}$$

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\hat{r}\cdot(-\hat{r}) =$$

$$\sigma_p = \frac{Q_1}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}-1\right)$$

$$r = 3a$$

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0(3a)^2}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\hat{r}\cdot\hat{r} + A\,3a\,\hat{r}\cdot(-\hat{r})$$

$$\sigma_p = \frac{Q_1}{36\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right) - 3aA$$