

# CLASE 17: MEDIOS MATERIALES MAGNÉTICOS



universidad de buenos aires - exactas  
departamento de física

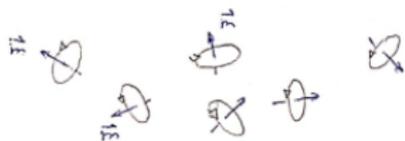
4 de junio de 2021

# ESQUEMA DE LA CLASE DE HOY

- Medios Materiales magnéticos
  - ▶ Medios Lineales: Cable coaxil
  - ▶ Magnetización permanente

# MATERIALES MAGNÉTICOS

A nivel microscópico en un material magnético se generan corrientes pequeñas generadas por electrones. En ausencia de un campo magnético externo, estas corrientes están orientadas al azar, de manera que se cancelan y el campo magnético total es 0.



A nivel microscópico se pueden considerar como mini dipolos magnéticos. Si colocamos el material en un campo magnético, aparecerán  $\tau = \vec{m} \times \vec{B}$  que alinearán al menos parcialmente los dipolos con el campo, produciendo una **magnetización** del medio. Existen

diversas formas:

- **Paramagnetismo:** Alineación de los dipolos paralela al campo  $\vec{B}$ .
- **Diamagnetismo:** Alineación de los dipolos anti-paralela al campo  $\vec{B}$ .
- **Ferromagnetismo:** Alineación permanente de los dipolos. Depende la historia previa del material.

# MATERIALES MAGNÉTICOS

Así cómo hicimos en el caso de medios materiales en la parte de electrostática, vamos a definir un nuevo campo  $\vec{H}$  para materiales magnéticos.

La definición de  $\vec{H}$  es

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (1)$$

donde  $\vec{M}$  es el campo de magnetización.

Las ecuaciones que cumple  $\vec{H}$  son

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \mu_0 \vec{j}_\ell \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad (2)$$

y recordemos que las ecuaciones que cumple  $\vec{B}$  son:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_T = \mu_0 (\vec{j}_\ell + \vec{j}_m) \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

# MATERIALES MAGNÉTICOS

Fuentes de  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$

	Vol	Sup
$\vec{\nabla} \times \vec{B}$	$\vec{j}_{\text{tot}} = \vec{j}_\ell + \vec{j}_m$ donde $\vec{j}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$	$\vec{\kappa}_{\text{tot}} = \vec{\kappa}_\ell + \vec{\kappa}_m$ donde $\vec{\kappa}_m = \vec{M} \times \hat{n}$
$\vec{\nabla} \times \vec{H}$	$\vec{j}_\ell$	$\vec{\kappa}_\ell$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}$	$-\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$	$\vec{M} \cdot \hat{n}$

recordemos que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  siempre. Haciendo una analogía con el campo eléctrico se definen las “cargas” de magnetización en volumen y superficie:

$$\rho_m = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \qquad \sigma_m = \vec{M} \cdot \hat{n} \qquad (4)$$

donde  $\hat{n}$  es la normal exterior al medio material magnetizado.

# MATERIALES MAGNÉTICOS LINEALES

Así como existen materiales dieléctricos lineales, también existen materiales magnéticos lineales. Dichos materiales satisfacen la siguiente relación

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (5)$$

donde en principio  $\chi_m$  es un tensor. Definiendo la permeabilidad  $\mu$  como

$$\mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m) \quad (6)$$

podemos obtener

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (7)$$

Noten que si el material es isótropo, entonces  $\chi_m$  es una función escalar y si además es homogéneo, se cumple que  $\vec{\nabla} \mu = \vec{0}$  entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = (1/\mu) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8)$$

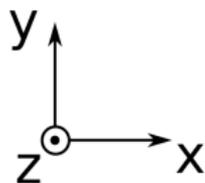
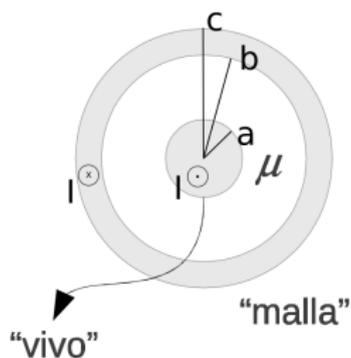
Lo cual nos permite usar un análogo a la ley de Ampère para el campo  $\vec{H}$ .

Ley de Ampère para el campo  $\vec{H}$ :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = j_l \quad (9)$$

## PROBLEMA 14

Se tienen dos cilindros conductores: uno de radio  $a$  por el que circula corriente  $I$ , y otro hueco de radio interno  $b$  y radio externo  $c$  por el que circula una corriente  $I$  pero en sentido opuesto. Entre medio de los dos cilindros conductores hay un material de permeabilidad magnética  $\mu$ . Suponiendo que las corrientes son uniformes se pide hallar  $\vec{B}$  en todo el espacio.



## PROBLEMA 14

Lo primero que debemos analizar es cuáles son las fuentes de  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ :

- Fuentes de  $\vec{B}$ : Corrientes libres y de magnetización en volumen y superficie.

En  $a < r < b$  hay un medio lineal, con lo cual habrá magnetización, pero como no conocemos  $\vec{M}$ , no podemos calcular las corrientes de magnetización antes de calcular  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ .

- Fuentes de  $\vec{H}$ :

- ▶ Fuentes del  $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ : Corrientes libres en los cilindros conductores
- ▶ Fuentes de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$ .

Como en  $a < \rho < b$  material el lineal, sabemos que  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  y por lo tanto  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ .

Entonces, **podemos usar la ley de Ampere para calcular  $\vec{H}$** .

A continuación utilizaremos la simetría de la configuración para deducir la dirección del campo  $\vec{H}$  y su dependencia.

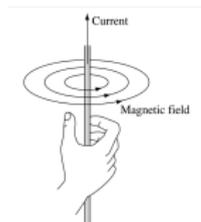
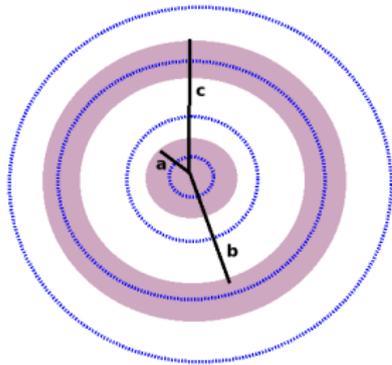


Figura tomada de  
Griffiths

El sistema tiene simetría de rotación alrededor del eje de simetría de la configuración que llamaremos  $z$  y también simetría de traslación a lo largo del mismo.

Esto nos permite inferir que  $\vec{H} = \vec{H}(\rho)$ .

¿Qué hay de la dirección de  $\vec{H}$ ? Utilizando la regla de la mano derecha, con el pulgar apuntando en la dirección de la corriente, vemos que  $\vec{H}(\rho) = H(\rho)\hat{\phi}$ ,



Aplicando la ley de Ampere para calcular  $\vec{H}$ :

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_0^{2\pi} H(\rho) \hat{\phi} \cdot \rho d\phi \hat{\phi} \\ &= 2\pi r H(\rho) \end{aligned}$$

Esta ecuación para todo  $\rho$ .

Ahora veamos la parte izquierda de la ley de Ampere ( $I_{\text{conc}}$ ).

Las corrientes que circulan por el cable coaxil:

- $\vec{j}_1 = I/(\pi a^2)\hat{z}$  en el cilindro interior
- $\vec{j}_2 = -I/(\pi(c^2 - b^2))\hat{z}$  en el cilindro exterior

$$\rho < a \quad \Rightarrow \quad I_{\text{conc}} = j_1 \pi \rho^2 = \frac{I \rho^2}{a^2}$$

$$a < \rho < b \quad \Rightarrow \quad I_{\text{conc}} = j_1 \pi a^2 = I$$

$$b < \rho < c \quad \Rightarrow \quad I_{\text{conc}} = j_1 \pi a^2 + j_2 \pi (\rho^2 - b^2) = I \left( 1 - \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right)$$

$$\rho > c \quad \Rightarrow \quad I_{\text{conc}} = 0$$

En resumen, obtenemos:

$$\vec{H}(r) = \begin{cases} \frac{I\rho}{2\pi a^2} \hat{\phi} & \rho \leq a \\ \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi} & a < \rho \leq b \\ \frac{I}{2\pi\rho} \left(1 - \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right) \hat{\phi} & b < \rho \leq c \\ 0 & c < \rho \end{cases} \quad (10)$$

Para obtener  $\vec{B}$  utilizamos la relación

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} - \vec{M}) \stackrel{\text{mat lin}}{=} \mu\vec{H} \quad (11)$$

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \hat{\phi} & \rho \leq a \\ \frac{\mu I}{2\pi \rho} \hat{\phi} & a < \rho \leq b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \left(1 - \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right) \hat{\phi} & b < \rho \leq c \\ 0 & c < \rho \end{cases} \quad (12)$$

donde asumimos que la magnetización del material conductor es despreciable

También podemos obtener la magnetización, sabiendo que para un material lineal se cumple que

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{B} \quad (13)$$

entonces

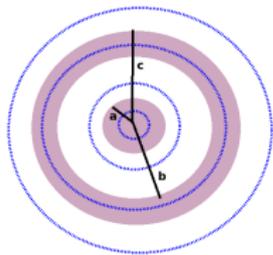
$$\vec{M}(r) = \begin{cases} 0 & \rho \leq a \\ \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi} & a < \rho \leq b \\ 0 & b < \rho \end{cases} \quad (14)$$

Ahora vamos a hallar las corrientes de magnetización:  
Recordemos que

$$\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M} \quad \vec{g}_m = \vec{M} \times \hat{n}$$

$$\vec{j}_m = \vec{\nabla} \times M_\phi \hat{\phi} = -\frac{dM_\phi}{dz} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho M_\phi)}{d\rho} \hat{z} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi\rho} \right] = 0$$

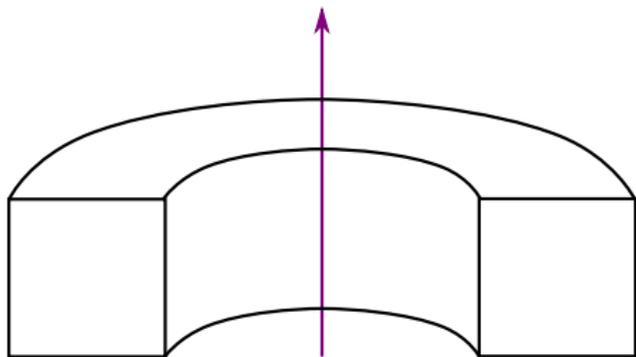
Veamos ahora las corrientes de magnetización en superficie:



$$\begin{aligned} \rho = a \quad \Rightarrow \quad \vec{g}_m &= \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi a} \hat{\phi} \times (-\hat{\rho}) \\ &= \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi a} \hat{z} \\ \rho = b \quad \Rightarrow \quad \vec{g}_m &= \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi b} \hat{\phi} \times (\hat{\rho}) \\ &= - \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi b} \hat{z} \end{aligned}$$

## PROBLEMA 16: SUGERENCIA

En el Problema 16 les dicen que tienen un toroide con magnetización permanente. Les sugiero que piensen en uno con sección cuadrada en lugar de sección circular, de este modo les va a resultar más fácil escribir las normales.

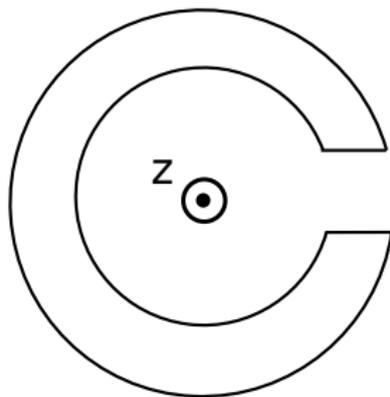


## PROBLEMA 15-16: COMENTARIO

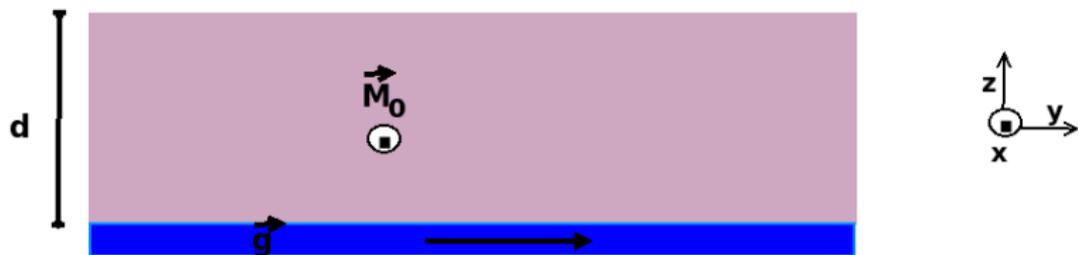
En los casos en que no hay fuentes de rotor de  $\vec{H}$  pero si hay fuentes de divergencia como

$$\rho_m = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \qquad \sigma_m = \hat{n} \cdot \vec{M}$$

se puede pensar como un problema electrostático análogo. Esto les puede servir para intuir las líneas de campo en el problema 15 y en el problema 16 cuando se corta un entrehierro (se elimina una sección del toroide).



# MAGNETIZACIÓN PERMANENTE (EJERCICIO 1)



Se tiene un plano infinito por el cual circula una densidad de corriente  $\vec{g} = g_0\hat{y}$ . A continuación del plano se halla una lámina de caras paralelas infinita de espesor  $d$  y magnetización permanente  $\vec{M} = M_0\hat{x}$ . Hallar los campos  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  en todo el espacio.

**Fuentes de  $\vec{H}$ :**

- Fuentes del  $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ : Corrientes libres en volumen y superficie  
 $\Rightarrow \vec{g} = g_0\hat{y}$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$  en volumen y  $\vec{M} \cdot \hat{n}$  donde  $\hat{n}$  en superficie es la normal a la superficie con magnetización



$$\vec{\nabla} \cdot (M_0 \hat{x}) = \frac{dM_x}{dx} + \frac{dM_y}{dy} + \frac{dM_z}{dz} = \frac{dM_x}{dx} = 0$$

Veamos las fuentes de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}$  en superficie:

en  $z = 0$

$$M_0 \hat{x} \cdot (-\hat{z}) = 0$$

en  $z = d$

$$M_0 \hat{x} \cdot \hat{z} = 0$$

Por lo tanto la única fuente de  $\mathbf{H}$  es  $\vec{g} = g_0 \hat{y}$ .

Veamos ahora las fuentes de  $\vec{B}$ :

- Fuentes del  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ : Corrientes libres y de magnetización en volumen y superficie

- ▶ Corrientes libres  $\Rightarrow \vec{g} = g_0 \hat{y}$
- ▶ Corrientes de magnetización:  $\vec{\nabla} \times \vec{M}$  en volumen y  $\vec{M} \times \hat{n}$  donde  $\hat{n}$  en superficie es la normal a la superficie con magnetización

$$\vec{\nabla} \times (M_0 \hat{x}) = \frac{dM_0}{dz} \hat{y} - \frac{dM_0}{dy} \hat{z} = 0$$

en  $z = 0$

$$\vec{g}_m = M_0 \hat{x} \times (-\hat{z}) = M_0 \hat{y}$$

en  $z = d$

$$\vec{g}_m = M_0 \hat{x} \times \hat{z} = -M_0 \hat{y}$$

Por lo tanto las fuentes de  $\vec{B}$  son  $\vec{g} = g_0 \hat{y}$  y las corrientes de magnetización en superficie en  $z = 0$  y  $z = d$ . Por lo tanto, es conveniente resolver este problema calculando primero  $\vec{H}$  usando la ley de Ampere y luego  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ .

Recordando el campo magnético  $\vec{B}$  de un plano infinito por el cual circula corriente superficial  $\vec{g} = g_0 \hat{y}$ :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 g_0}{2} \hat{x} & z > 0 \\ -\frac{\mu_0 g_0}{2} \hat{x} & z < 0 \end{cases}$$

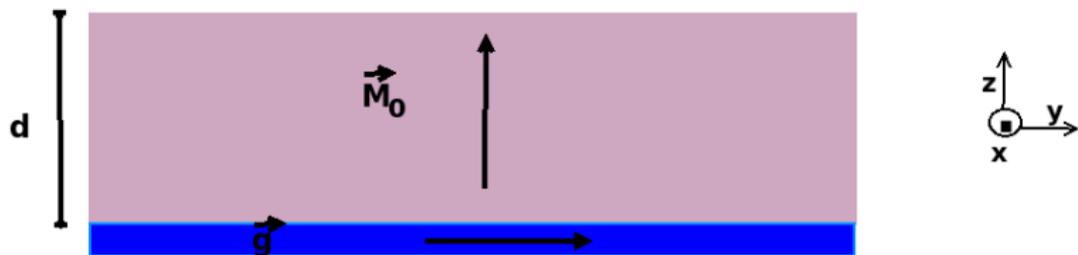
Usando el resultado anterior y recordando que  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_l$ , podemos escribir el campo  $\vec{H}$  de un plano infinito por el cual circula corriente superficial libre  $\vec{g} = g_0 \hat{y}$

$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{g_0}{2} \hat{x} & z > 0 \\ -\frac{g_0}{2} \hat{x} & z < 0 \end{cases}$$

Finalmente calculamos  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 g_0}{2} \hat{x} & z > d \\ \mu_0 \left( \frac{g_0}{2} + M_0 \right) \hat{x} & 0 < z < d \\ -\frac{\mu_0 g_0}{2} \hat{x} & z < 0 \end{cases}$$

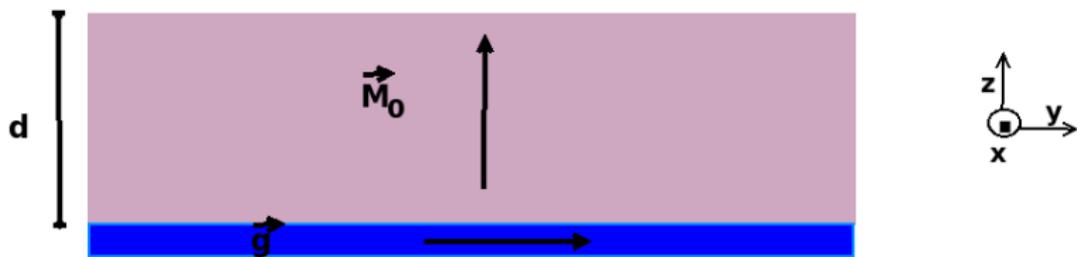
## MAGNETIZACIÓN PERMANENTE (EJERCICIO 2)



Se tiene un plano infinito por el cual circula una densidad de corriente  $\vec{g} = g_0\hat{y}$ . A continuación del plano se halla una lámina de caras paralelas infinita de espesor  $d$  y magnetización permanente  $\vec{M} = M_0\hat{z}$ . Hallar los campos  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  en todo el espacio.

**Fuentes de  $\vec{H}$ :**

- Fuentes del  $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ : Corrientes libres en volumen y superficie  
 $\Rightarrow \vec{g} = g_0\hat{y}$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$  en volumen y  $\vec{M} \cdot \hat{n}$  donde  $\hat{n}$  en superficie es la normal a la superficie con magnetización



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = \frac{dM_x}{dx} + \frac{dM_y}{dy} + \frac{dM_z}{dz} = \frac{dM_0}{dz} = 0$$

Veamos las fuentes de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}$  en superficie:

en  $z = 0$

$$M_0 \hat{z} \cdot (-\hat{z}) = -M_0$$

en  $z = d$

$$M_0 \hat{z} \cdot \hat{z} = M_0$$

Por lo tanto las fuentes de  $\vec{H}$  son  $\vec{g} = g_0 \hat{y}$  y las cargas de magnetización en  $z = 0$  y  $z = d$ .

Veamos ahora las fuentes de  $\vec{B}$ :

- Fuentes del  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ : Corrientes libres y de magnetización en volumen y superficie

- ▶ Corrientes libres  $\Rightarrow \vec{g} = g_0 \hat{y}$
- ▶ Corrientes de magnetización:  $\vec{\nabla} \times \vec{M}$  en volumen y  $\vec{M} \times \hat{n}$  donde  $\hat{n}$  en superficie es la normal a la superficie con magnetización

$$\vec{\nabla} \times (M_0 \hat{z}) = \frac{dM_0}{dy} \hat{x} - \frac{dM_0}{dx} \hat{y} = 0$$

en  $z = 0$

$$\vec{g}_m = M_0 \hat{z} \times (-\hat{z}) = 0$$

en  $z = d$

$$\vec{g}_m = M_0 \hat{z} \times \hat{z} = -0$$

Por lo tanto la única fuente de  $\vec{B}$  es  $\vec{g} = g_0 \hat{y}$  Por lo tanto, es conveniente resolver este problema calculando primero  $\vec{B}$  usando la ley de Ampere y luego  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ .

Usando la ley de Ampere en el Ejercicio 8 de la guía 4 obtuvimos el campo magnético  $\vec{B}$  de una plano infinito por el cual circula corriente superficial  $\vec{g} = g_0\hat{y}$ :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 g_0}{2} \hat{x} & z > 0 \\ -\frac{\mu_0 g_0}{2} \hat{x} & z < 0 \end{cases}$$

Finalmente calculamos  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ :

$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{g_0}{2} \hat{x} & z > d \\ \frac{g_0}{2} \hat{x} - M_0 \hat{z} & 0 < z < d \\ -\frac{g_0}{2} \hat{x} & z < 0 \end{cases}$$