

CLASE 21: CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA



universidad de buenos aires - exactas
departamento de Física

17 de junio de 2021

REPASO DE NÚMEROS COMPLEJOS

Recordemos que si $z = a + bi$ es un número complejo, su expresión en forma polar es:

$$z = |z|e^{i\theta} \quad \text{con} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

A su vez:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Recordemos que $\bar{z} = a - bi$ y

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta \end{aligned}$$

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

Recordemos la ecuación básica de la teoría de circuitos:

$$\epsilon = RI + L\dot{I} + \frac{Q}{C} \quad (1)$$

donde ϵ es la caída de tensión en la fuente, R es la resistencia, L la inductancia y C la capacidad. Derivando esta ecuación se obtiene:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = R\dot{I} + L\ddot{I} + \frac{I}{C} \quad (2)$$

Ahora vamos a resolver un circuito donde $\epsilon = \epsilon_0 \cos \omega t$. Una herramienta muy útil es tratar tanto a la fuente como a la corriente como números complejos:

$$\epsilon = \epsilon_0 e^{i\omega t} \quad (3)$$

$$J = J_0 e^{i\omega t} \quad (4)$$

donde ϵ_0 es un número real y J_0 es un número complejo.

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

Aquí es muy importante entender que ϵ y J no representan la caída de tensión real en la fuente o la corriente real, sino que son herramientas matemáticas para facilitar la resolución de los circuitos y están relacionadas con estas últimas:

$$V(t) = \operatorname{Re}[\epsilon_0 e^{i\omega t}] = \epsilon_0 \cos \omega t \quad (5)$$

$$I(t) = \operatorname{Re}[J_0 e^{i\omega t}] = \operatorname{Re}[|J_0| e^{i(\omega t + \theta)}] = |J_0| \cos(\omega t + \theta) \quad (6)$$

donde $J_0 = |J_0| e^{i\theta}$ es un número complejo.

Recordemos la ecuación 2 :

$$\frac{d\epsilon}{dt} = R\dot{I} + L\ddot{I} + \frac{I}{C}$$

Y ahora insertemos en esta ecuación las expresiones complejas $\epsilon = \epsilon_0 e^{i\omega t}$ y $J = J_0 e^{i\omega t}$:

$$i\omega\epsilon_0 e^{i\omega t} = i\omega R J_0 e^{i\omega t} - \omega^2 L J_0 e^{i\omega t} + \frac{J_0 e^{i\omega t}}{C} \quad (7)$$

$$i\omega\epsilon_0 e^{i\omega t} = (i\omega R - \omega^2 L + \frac{1}{C}) J_0 e^{i\omega t} \quad (8)$$

Dividiendo esta última ecuación por $i\omega$ obtenemos:

$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = \underbrace{(R + i\omega L - \frac{i}{\omega C})}_{Z} J_0 e^{i\omega t} \quad (9)$$

Es decir, que podemos escribir la ecuación anterior:

$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = Z J_0 e^{i\omega t} \quad (10)$$

Vamos a llamar a Z la impedancia:

$$Z = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C} = R + iX \quad (11)$$

donde $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$.

Definimos la **admitancia** y recordando que $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{R}{R^2 + X^2} - i\frac{X}{R^2 + X^2} \quad (12)$$

Definimos la **conductancia** como la parte real de la admitancia

$$G = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{Z}\right] = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad (13)$$

y la **susceptancia** como la parte imaginaria de la admitancia

$$B = \operatorname{Im}\left[\frac{1}{Z}\right] = -\frac{X}{R^2 + X^2} \quad (14)$$

ECUACIONES DE MALLAS

Podemos escribir las ecuaciones de malla para la corriente compleja:

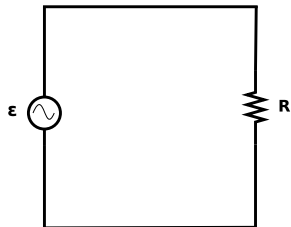
$$\epsilon = \sum_i Z_i J_i \quad (15)$$

donde $\epsilon = \epsilon_0 e^{i\omega t}$ y

$$J_i = J_{oi} e^{i\omega t} = |J_{oi}| e^{i\alpha} e^{i\omega t} = |J_{oi}| e^{i(\omega t + \alpha)} \quad (16)$$

ALGUNOS EJEMPLOS SIMPLES

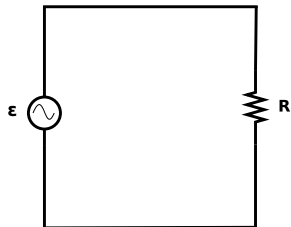
Para el siguiente circuito vamos a calcular la corriente que pasa por la resistencia:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = R J_0 e^{i\omega t}$$

ALGUNOS EJEMPLOS SIMPLES

Para el siguiente circuito vamos a calcular la corriente que pasa por la resistencia:



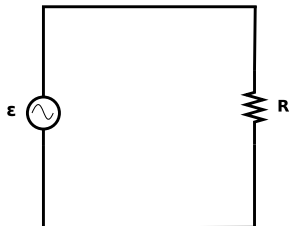
$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = R J_0 e^{i\omega t}$$

De esta manera obtenemos:

$$J_0 = \frac{\epsilon_0}{R}$$

ALGUNOS EJEMPLOS SIMPLES

Para el siguiente circuito vamos a calcular la corriente que pasa por la resistencia:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = R J_0 e^{i\omega t}$$

De esta manera obtenemos:

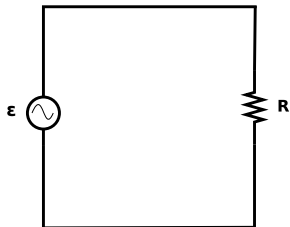
$$J_0 = \frac{\epsilon_0}{R}$$

Y por lo tanto:

$$J = J_0 e^{i\omega t} = \frac{\epsilon_0}{R} e^{i\omega t}$$

ALGUNOS EJEMPLOS SIMPLES

Para el siguiente circuito vamos a calcular la corriente que pasa por la resistencia:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = R J_0 e^{i\omega t}$$

De esta manera obtenemos:

$$J_0 = \frac{\epsilon_0}{R}$$

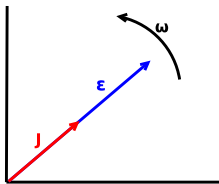
Y por lo tanto:

$$J = J_0 e^{i\omega t} = \frac{\epsilon_0}{R} e^{i\omega t}$$

Finalmente, la corriente que pasa por la resistencia es:

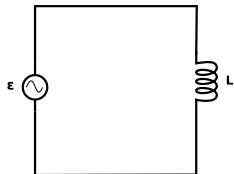
$$I(t) = \text{Re}J = \frac{\epsilon_0}{R} \cos \omega t$$

Podemos concluir que para la resistencia, la corriente y la fuente están en fase.



ALGUNOS EJEMPLOS SIMPLES

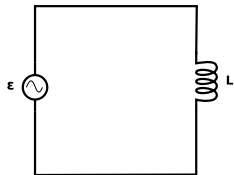
Para el siguiente circuito vamos a calcular la corriente que pasa por la inductancia:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = i\omega L J_0 e^{i\omega t}$$

ALGUNOS EJEMPLOS SIMPLES

Para el siguiente circuito vamos a calcular la corriente que pasa por la inductancia:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = i\omega L J_0 e^{i\omega t}$$

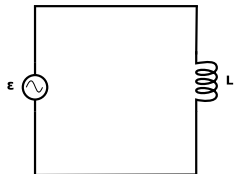
De esta manera obtenemos:

$$J_0 = \frac{\epsilon_0}{i\omega L} = -i \frac{\epsilon_0}{\omega L}$$

Recordemos que $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = -i$.

ALGUNOS EJEMPLOS SIMPLES

Para el siguiente circuito vamos a calcular la corriente que pasa por la inductancia:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = i\omega L J_0 e^{i\omega t}$$

De esta manera obtenemos:

$$J_0 = \frac{\epsilon_0}{i\omega L} = -i \frac{\epsilon_0}{\omega L}$$

Recordemos que $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = -i$.

Y por lo tanto:

$$J_0 = \frac{\epsilon_0}{i\omega L} = -i \frac{\epsilon_0}{\omega L} = \frac{\epsilon_0}{\omega L} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

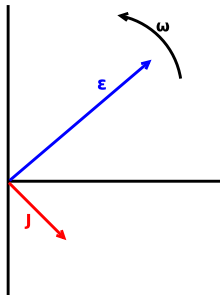
De esta manera obtenemos:

$$J = J_0 e^{i\omega t} = \frac{\epsilon_0}{\omega L} e^{i(\omega t - i\frac{\pi}{2})}$$

Finalmente, la corriente que pasa por la inductancia es:

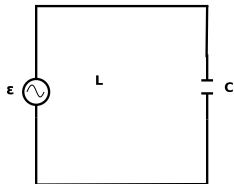
$$I(t) = \operatorname{Re}J = \frac{\epsilon_0}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Podemos concluir que para la inductancia, la corriente y la fuente están en desfasadas en $-\frac{\pi}{2}$.



ALGUNOS EJEMPLOS SIMPLES

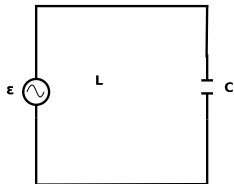
Para el siguiente circuito vamos a calcular la corriente que pasa por el capacitor:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = -\frac{i}{\omega C} J_0 e^{i\omega t}$$

ALGUNOS EJEMPLOS SIMPLES

Para el siguiente circuito vamos a calcular la corriente que pasa por el capacitor:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = -\frac{i}{\omega C} J_0 e^{i\omega t}$$

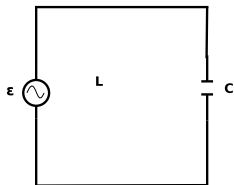
De esta manera obtenemos:

$$J_0 = -\frac{\epsilon_0 \omega C}{i} = i \epsilon_0 \omega C$$

Recordemos que $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$.

ALGUNOS EJEMPLOS SIMPLES

Para el siguiente circuito vamos a calcular la corriente que pasa por el capacitor:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = -\frac{i}{\omega C} J_0 e^{i\omega t}$$

De esta manera obtenemos:

$$J_0 = -\frac{\epsilon_0 \omega C}{i} = i \epsilon_0 \omega C$$

Recordemos que $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$.

Y por lo tanto:

$$J_0 = -\frac{\epsilon_0 \omega C}{i} = i \epsilon_0 \omega C = \epsilon_0 \omega C e^{i\frac{\pi}{2}}$$

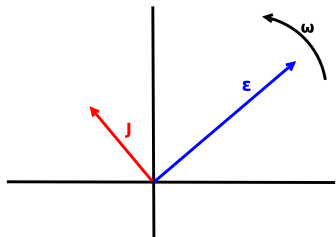
De esta manera

$$J = J_0 e^{i\omega t} = \epsilon_0 \omega C e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

Finalmente, la corriente que pasa por el capacitor es:

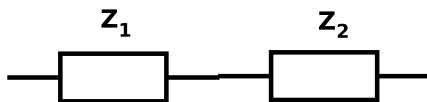
$$I(t) = \text{Re}J = \epsilon_0\omega C \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Podemos concluir que para el capacitor, la corriente está adelantada $\frac{\pi}{2}$ respecto de la fuente.



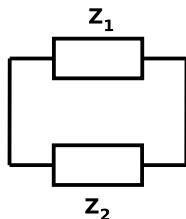
IMPEDANCIAS EN SERIE Y PARALELO

Para dos impedancias en serie la impedancia equivalente será:



$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2$$

Para dos impedancias en paralelo la impedancia equivalente será:



$$Z_{eq} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)^{-1}$$

CAÍDA DE TENSIÓN:

La caída de tensión en una impedancia:

$$\operatorname{Re}[\Delta V] = \operatorname{Re}[ZJ] = \operatorname{Re}[|\Delta V|e^{i\omega t + \alpha}] = |\Delta V| \cos(\omega t + \alpha)$$

Qué es lo que medirá un voltímetro? Teniendo en cuenta que el período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, se define ΔV_{RMS} :

$$\begin{aligned}\Delta V_{RMS}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T [|\Delta V| \cos(\omega t + \alpha)]^2 dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \Delta V^2 \left[\frac{2(\alpha + \omega t) + \sin[2(\omega t + \alpha)]}{4\omega} \right] \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \Delta V^2 \left[\frac{2\alpha + 2\pi + \sin(4\pi + 2\alpha) - 2\alpha - \sin(2\alpha)}{4\omega} \right] \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \Delta V^2 \left[\frac{2\pi + \sin(4\pi) \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) \cos(4\pi) - \sin(2\alpha)}{4\omega} \right] \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \Delta V^2 \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\Delta V^2}{2}\end{aligned}$$

CAÍDA DE TENSIÓN:

Con cual finalmente se obtiene:

$$\Delta V_{RMS} = |\Delta V| \frac{\sqrt{2}}{2}$$

POTENCIA

La potencia entregada por la fuente será:

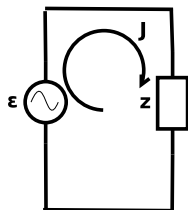
$$P(t) = \operatorname{Re}J(t) \operatorname{Re}\epsilon(t)$$

La potencia disipada por una resistencia:

$$P(t) = RI^2(t) = R[\operatorname{Re}J(t)]^2$$

Por último, la potencia media es la potencia disipada en un período completo.

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$



Si $J = |J_0|e^{i(\omega t + \theta)}$ y $\epsilon = \epsilon_0 e^{i(\omega t)}$:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t) dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \operatorname{Re} J(t) \operatorname{Re} \epsilon(t) \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} |J_0| \cos(\omega t + \theta) \epsilon_0 \cos(\omega t) \\ &= \frac{\omega}{2\pi} |J_0| \epsilon_0 \left[\frac{2\omega t \cos \theta + \sin(2\omega t + \theta)}{4\omega} \right] \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \\ &= \frac{\omega}{2\pi} |J_0| \epsilon_0 \left[\frac{4\pi \cos \theta + \sin(4\pi + \theta) - \sin \theta}{4\omega} \right] \\ &= \frac{\omega}{2\pi} |J_0| \epsilon_0 \left[\frac{4\pi \cos \theta + \sin(4\pi) \cos \theta - \sin \theta}{4\omega} \right] \\ &= \frac{\omega}{2\pi} |J_0| \epsilon_0 \frac{4\pi \cos \theta}{4\omega} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |J_0| \cos \theta\end{aligned}$$