FÍSICA 4

PRIMER CUATRIMESTRE 2010

GUÍA 10: ESTADÍSTICAS CUÁNTICAS

1. Considere dos partículas en tres niveles de energía no degenerados ($g_i = 1$; $i = 1,2,3$). Dibujar las distribuciones posibles según sean partículas que obedezcan las estadísticas de Boltzmann, de Fermi-Dirac o de Bose-Einstein.

2. Se tiene un sistema con dos niveles de energía, E_1 y E_2, cada uno con degeneración 4. Si el sistema consta de cuatro partículas, calcular el número de arreglos posibles:

   (a) Según la estadística de Boltzmann.

   (b) Según la de Bose – Einstein.

   (c) Según la de Fermi – Dirac.

3. Sea un sistema compuesto de osciladores armónicos de frecuencia angular ω, en contacto con una fuente térmica a temperatura T. Calcular la energía media de cada oscilador y el calor específico c_V.

4. Sea una cavidad cúbica de lado l. Calcular el número de autovalores de energía por unidad de volumen en el espacio de fases para una partícula dentro de esa caja. Deducir:

$$g(p) = \frac{d^3 n}{dp^3},\; g(E) = \frac{dn}{dE}$$

5. Sea un gas de electrones en una caja (electrones en un metal).

   (a) Hacer un gráfico de la función de distribución de Fermi-Dirac versus Energía a $T = 0K$.

   (b) Obtener una expresión para E_f, la energía del nivel de Fermi a $T = 0K$.

   (c) Encontrar la energía media por partícula para este gas a $T = 0K$.

   (d) Estimar la dependencia del calor específico c_V con la temperatura para temperaturas bajas ($T \approx 0$).

   (e) Empleando la condición de normalización, obtener una expresión para la energía del nivel de Fermi a temperaturas muy bajas en función de E_f.

6. El átomo de Berilio (Be) posee 4 electrones. Suponiendo que los niveles de energía de ese átomo corresponden a los de un átomo hidrogenoide de $Z = 4$, ($E_n = -Z^2 E_0/n^2$) dar:

   (a) La distribución de estos electrones a $T = 0K$, considerando los casos en que son partículas distinguibles o fermiones indistinguibles.

   (b) El número de arreglos posibles para esa distribución en ambos casos.

   (c) Considerando el caso real, fermiones indistinguibles, encontrar explícitamente la ocupación de cada nivel a $T \approx 0K$. Para ello considerar $E_f(T) = E_2 + \Delta k_B T$ (determinar Δ, k_B es la constante de Boltzman).

7. Para un gas de partículas de spin $1/2$ en un campo magnético B, encontrar la energía media y el calor específico c_V en función de la temperatura.

8. Sea un gas de moléculas diatómicas de masa M en un recipiente cúbico de lado l a temperatura T. En una primera aproximación, el Hamiltoniano de una molécula puede escribirse como:

$$H = H_{tras} + H_{rot} + H_{vib}$$

   donde H_{tras} corresponde a la traslación del centro de masa, $H_{rot} = L^2/2I$ corresponde a la energía de rotación de la molécula de momento de inercia I y H_{vib} es la parte vibracional. Suponiendo que no hay mezcla de coordenadas en estos Hamiltonianos parciales calcular:

(a) El calor específico a volumen constante c_V^{tras} debido a la parte traslacional. Para ello considere $\theta_t \ll T$ con $\theta_t = \pi\hbar^2/(2Ml^2k_B)$.

(b) El calor específico c_V^{rot} debido a la parte rotacional. Considerar los dos límites, $\theta_r \ll T$ y $\theta_r \gg T$, donde $\theta_r = \hbar^2/(2Ik_B)$.

(c) El calor específico debido a la parte vibracional.

(d) Hacer un gráfico cualitativo de $c_V\, vs.\, T$ y comparar con lo predicho por la teoría clásica (teorema de equipartición). Para el gráfico considerar $\theta_v = \hbar\omega/k_B \geq \theta_t$.

9. Considerando un sólido unidimensional como un arreglo periódico de átomos de masa m con interacciones elásticas de constante de fuerza $k = \frac{1}{2}m\omega_0^2$ calcular:

    (a) Las frecuencias de las oscilaciones colectivas (fonones) en función del vector de onda k.

    (b) El calor específico en los límites de alta y baja temperatura.