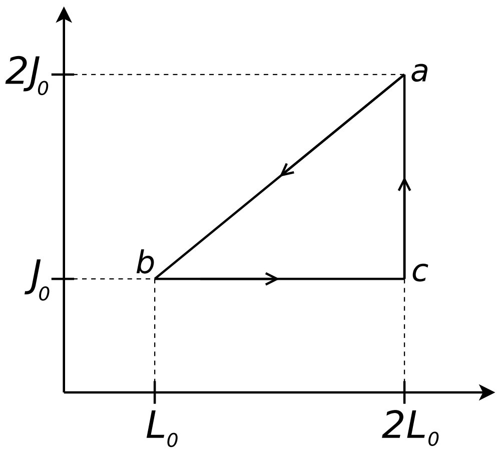
PRIMER PARCIAL DE FÍSICA 4 - RESUELTO

TERMODINÁMICA - 11/05/2013

1. Una máquina térmica utiliza una banda elástica cuya ecuación de estado es $J = \alpha LT$, con J la tensión, L la longitud, α una constante y T la temperatura absoluta. El calor específico es una constante, $c_L = c$.



a) Obtenga la expresión de la energía interna y el calor intercambiado en cada proceso.

b) Calcule la eficiencia de la máquina $\eta = \frac{W}{Q_T}$, donde W es el trabajo total del ciclo y Q_T el calor intercambiado en proceso isotérmico.

Solución ítem *a*) Para encontrar la energía interna vamos a integrar sus derivadas respecto de T y L. La primer derivada es trivial

$$\left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_L = c_L = c. \tag{1}$$

Para la segunda, usaremos la relación que aprendimos para los sistemas pVT tomando las derivadas cruzadas de la entropía:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_T = T\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V - p$$

haciendo los reemplazos $V \to L$ y $p \to -J$. Así obtenemos

$$\left.\frac{\partial U}{\partial L}\right|_T = -T\left.\frac{\partial J}{\partial T}\right|_L + J = -T\alpha L + J = 0 \tag{2}$$

De (1) y (2) deducimos que $U = cT + U_0$, con U_0 una constante.

Para obtener los calores intercambiados en cada proceso utilizaremos la primera ley $\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q + J\mathrm{d}L$.

- ab: Isotérma, $\mathrm{d}Q = -J\mathrm{d}L$.

$$Q_{ab} = -\int_{2L_0}^{L_0} \alpha T L \mathrm{d}L = \frac{J_0}{L_0}\int_{L_0}^{2L_0} L\mathrm{d}L = \frac{3}{2}J_0L_0 \tag{3}$$

- bc: Tensión constante, $J = J_0$.

$$Q_{bc} = c\,(T_c - T_b) - \int_{L_0}^{2L_0} J_0 \mathrm{d}L = c\left(\frac{J_0}{2\alpha L_0} - \frac{J_0}{\alpha L_0}\right) - J_0 L_0 = -\frac{J_0 c}{2\alpha L_0} - J_0 L_0 \tag{4}$$

- ca: Isocórico, $L = L_0$.

$$Q_{ca} = c\,(T_a - T_c) = \frac{J_0 c}{2\alpha L_0} \tag{5}$$

De (3), (4) y (5) podemos verificar que $\Delta U_{Total} = 0$ y $W_{Total} = \frac{J_0 L_0}{2}$.

Solución ítem *b*) Simplemente aplicamos la definición:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ab}} = \frac{J_0 L_0}{2}\frac{2}{3 J_0 L_0} = \frac{1}{3} \tag{6}$$

2. Un litro de agua líquida es comprimida isotérmicamente a 293 K desde 1 atm hasta 20 atm. Recuerde que para líquidos el cambio de volumen es despreciable ($\Delta V \ll V$). Suponga además que la compresibilidad isotérmica del agua $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T$ y el coeficiente de expansión térmica $\alpha = \frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p$ se mantienen constantes durante el proceso.

   a) ¿Cuánto trabajo es requerido?

   b) ¿Cuánto vale el calor intercambiado?

Datos $\kappa_T = 0{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{atm}^{-1}$; $\alpha = 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1}$.

Solución ítem *a*) Para calcular el trabajo hecho sobre el sistema utilizaremos la definición $W = -\int_i^f p\mathrm{d}V$. Dado que el proceso es isotérmico, podemos escribir el diferencial de volumen

$$\mathrm{d}V = \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p \mathrm{d}T + \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T \mathrm{d}p \equiv \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T \mathrm{d}p.$$

Así obtenemos

$$W_T = -\int_{1\mathrm{atm}}^{20\mathrm{atm}} p \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T \mathrm{d}p = \int_{1\mathrm{atm}}^{20\mathrm{atm}} pV\kappa_T \mathrm{d}p \cong V\kappa_T \int_{1\mathrm{atm}}^{20\mathrm{atm}} p\mathrm{d}p \cong 10^{-2}\ell\,\mathrm{atm} \tag{7}$$

Solución_ítem_*b*) Tomaremos un proceso reversible, $dQ = TdS$. Teniendo en cuenta que el proceso es isotérmico, escribiremos el diferencial de entropía como

$$T\mathrm{d}S = T\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_p \mathrm{d}T + T\left.\frac{\partial S}{\partial p}\right|_T \mathrm{d}p \equiv T\left.\frac{\partial S}{\partial p}\right|_T \mathrm{d}p = -T\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p \mathrm{d}p = -TV\alpha\mathrm{d}p.$$

Así podemos calcular el calor intercambiado como

$$Q = -T\alpha \int_{1\mathrm{atm}}^{20\mathrm{atm}} V\mathrm{d}p \cong -T\alpha V \int_{1\mathrm{atm}}^{20\mathrm{atm}} \mathrm{d}p \cong -1{,}1134\ell\,\mathrm{atm} \tag{8}$$

3. Un vapor que puede condensarse tiene una entropía molar dada por la expresión $s(u,v) = s_0 + R\ln\left[C(v-b)\left(u+\frac{a}{v}\right)^{5/2}\right]$ donde C, a, b y s_0 son constantes, u es la energía interna molar y v el volumen molar.

   a) Encuentre $u(T,v)$.

   b) Halle la ecuación de estado.

   c) Calcule c_p y c_v. **Ayuda:** $c_p - c_v = -T\frac{\left(\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_v\right)^2}{\left.\frac{\partial p}{\partial v}\right|_T}$.

   d) Calcule el calor latente L entre las fases líquido y vapor a temperatura T en función de la temperatura T, la constante de los gases R y los volúmenes molares v_ℓ y v_g.

Solución ítem *a*) De combinar la primer y Segunda Ley tenemos $T\mathrm{d}s = \mathrm{d}u + p\mathrm{d}v$. De allí es inmediato

$$\left.\frac{\partial s}{\partial u}\right|_v = \frac{1}{T} \text{ y } \left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_u = \frac{p}{T}.$$

Utilizaremos la primer relación en este ítem y la segunda en el siguiente. Así

$$\frac{1}{T} = R\frac{5}{2}\left(u+\frac{a}{v}\right)^{-1} \Rightarrow u = \frac{5}{2}RT - \frac{a}{v} \tag{9}$$

Solución ítem *b*) De lo deducido anteriormente:

$$\frac{p}{T} = R\left[\frac{1}{v-b} - \frac{5}{2}\left(u+\frac{a}{v}\right)^{-1}\frac{a}{v^2}\right] \Rightarrow p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \tag{10}$$

donde usamos la primer ecuación de (9) para introducir T^{-1} en el segundo término.

Solución ítem *c*) Para hallar el c_v primero escribiremos $s(T,v)$. Reemplazando (9) se tiene

$$s(T,v) = s_0 + R\ln\left[c(v-b)\left(\frac{5}{2}RT\right)^{5/2}\right]. \tag{11}$$

De la definición del c_v

$$c_v = T\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_v = TR\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}RT\right)^{-1}\frac{5}{2}R = \frac{5}{2}R \tag{12}$$

Para el c_p, si quisieramos utilizar la definición necesitaríamos $s(T,p)$. Como la ecuación de estado es complicada, esta alternativa es difícil de llevar a cabo. Como alternativa podemos utilizar la identidad probada en la Guía 3

$$c_p - c_v = \frac{Tv\alpha^2}{\kappa_T} = -T\frac{\left(\left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_p\right)^2}{\left.\frac{\partial v}{\partial p}\right|_T} = -T\frac{\left(\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_v\right)^2}{\left.\frac{\partial p}{\partial v}\right|_T}$$

donde el último paso se logra utilizando las identidades del Ej 1 de la Guía 1, y constituye la ayuda brindada. Haciendo uso de ella, calculemos primero las derivadas

$$\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_v = \frac{R}{v-b}; \left.\frac{\partial p}{\partial v}\right|_T = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3}$$

para obtener

$$c_p - c_v = -T\frac{\left(\frac{R}{v-b}\right)^2}{-\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3}} = \frac{R}{1 - \frac{2a}{RTv^3}(v-b)^2} \tag{13}$$

Solución ítem *d*) Recordemos que el calor latente $L = T\Delta s = T\left(s_g - s_\ell\right)$ y que ambas fases coexisten a la misma temperatura. Utilizando (11) tenemos

$$L = T\left(s_g - s_\ell\right) = RT\ln\left[\frac{v_{g-b}}{v_{\ell-b}}\right] \tag{14}$$

4. Se tiene un gas ideal formado partículas que se comportan como esferas rígidas de masa m, todas del mismo tamaño. El gas se encuentra en equilibrio termodinámico a temperatura T. En un experimento previo se midió la velocidad cuadrática media de las partículas: $\langle v^2 \rangle = 234{,}34\,\mathrm{m^2/s^2}$. Recuerde que el camino libre medio λ puede relacionarse con el tiempo entre colisiones τ y la velocidad media de la siguiente forma: $\lambda = \tau \langle v \rangle$.

   a) ¿A qué temperatura se encuentra el sistema?

   b) Encuentre a qué presión se halla el gas

   Datos $m = 5{,}3 \times 10^{-23}\,\mathrm{kg}$; $\tau = 10^{-10}\,\mathrm{s}$; $d = 5 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$; $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{kg\,m^2 s^{-2} K^{-1}}$

   Solución ítem *a*) Del teorema de equipartición tenemos que

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow T = \frac{m}{3k_B} \langle v^2 \rangle \tag{15}$$

   Solución ítem *b*) De la fórmula del camino libre medio λ tenemos que

$$\lambda = \tau \langle v \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} p \pi d^2} \Rightarrow p = \frac{m \langle v^2 \rangle}{3\sqrt{2}\pi d^2 \tau \langle v \rangle} \tag{16}$$

   Solo resta calcular el valor medio del módulo de la velocidad, utilizando el valor de temperatura hallado en el ítem anterior

$$\langle v \rangle = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/(2k_B T)} dv = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}}$$