

# FÍSICA 4

## SEGUNDO CUATRIMESTRE 2013

### GUÍA 10: ESTADÍSTICAS CUÁNTICAS

1. Considere dos partículas en tres niveles de energía no degenerados ( $g_i = 1; i = 1, 2, 3$ ). Dibujar las distribuciones posibles según sean partículas que obedezcan las estadísticas de Boltzmann, de Fermi-Dirac o de Bose-Einstein.
2. Se tiene un sistema con dos niveles de energía,  $E_1$  y  $E_2$ , cada uno con degeneración 4. Si el sistema consta de cuatro partículas, calcular el número de arreglos posibles:
  - a) Según la estadística de Boltzmann.
  - b) Según la de Bose – Einstein.
  - c) Según la de Fermi – Dirac.
3. Sea un sistema compuesto de osciladores armónicos de frecuencia angular  $\omega$ , en contacto con una fuente térmica a temperatura  $T$ . Calcular la energía media de cada oscilador y el calor específico  $c_V$ .
4. Sea una cavidad cúbica de lado  $l$ . Calcular el número de autovalores de energía por unidad de volumen en el espacio de fases para una partícula dentro de esa caja. Deducir:

$$g(p) = \frac{d^3n}{dp^3}, \quad g(E) = \frac{dn}{dE}$$

5. Sea un gas de electrones en una caja (electrones en un metal).
  - a) Hacer un gráfico de la función de distribución de Fermi-Dirac versus Energía a  $T = 0$  K.
  - b) Obtener una expresión para  $E_f$ , la energía del nivel de Fermi a  $T = 0$  K.
  - c) Encontrar la energía media por partícula para este gas a  $T = 0$  K.
  - d) Estimar la dependencia del calor específico  $c_V$  con la temperatura para temperaturas bajas ( $T \approx 0$ ).
  - e) Empleando la condición de normalización, obtener una expresión para la energía del nivel de Fermi a temperaturas muy bajas en función de  $E_f$ .
6. El átomo de Berilio (Be) posee 4 electrones. Suponiendo que los niveles de energía de ese átomo corresponden a los de un átomo hidrogenoide de  $Z = 4$ , ( $E_n = -Z^2 E_0/n^2$ ) dar:
  - a) La distribución de estos electrones a  $T = 0$  K, considerando los casos en que son partículas distinguibles o fermiones indistinguibles.
  - b) El número de arreglos posibles para esa distribución en ambos casos.
  - c) Considerando el caso real, fermiones indistinguibles, encontrar explícitamente la ocupación de cada nivel a  $T \approx 0$  K. Para ello considerar  $E_f(T) = E_2 + \Delta k_B T$  (determinar  $\Delta$ ,  $k_B$  es la constante de Boltzman).
7. Para un gas de partículas de spin  $1/2$  en un campo magnético  $B$ , encontrar la energía media y el calor específico  $c_V$  en función de la temperatura.
8. Sea un gas de moléculas diatómicas de masa  $M$  en un recipiente cúbico de lado  $l$  a temperatura  $T$ . En una primera aproximación, el Hamiltoniano de una molécula puede escribirse como:

$$H = H_{tras} + H_{rot} + H_{vib}$$

donde  $H_{tras}$  corresponde a la traslación del centro de masa,  $H_{rot} = L^2/2I$  corresponde a la energía de rotación de la molécula de momento de inercia  $I$  y  $H_{vib}$  es la parte vibracional. Suponiendo que no hay mezcla de coordenadas en estos Hamiltonianos parciales calcular:

- a) El calor específico a volumen constante  $c_V^{tras}$  debido a la parte traslacional. Para ello considere  $\theta_t \ll T$  con  $\theta_t = \pi \hbar^2 / (2Ml^2 k_B)$ .
- b) El calor específico  $c_V^{rot}$  debido a la parte rotacional. Considerar los dos límites,  $\theta_r \ll T$  y  $\theta_r \gg T$ , donde  $\theta_r = \hbar^2 / (2Ik_B)$ .
- c) El calor específico debido a la parte vibracional.
- d) Hacer un gráfico cualitativo de  $c_V$  vs  $T$  y comparar con lo predicho por la teoría clásica (teorema de equipartición). Para el gráfico considerar  $\theta_v = \hbar \omega / k_B \geq \theta_t$ .
9. Considerando un sólido unidimensional como un arreglo periódico de átomos de masa  $m$  con interacciones elásticas de constante de fuerza  $k = \frac{1}{2} m \omega_0^2$  calcular:
- a) Las frecuencias de las oscilaciones colectivas (fonones) en función del vector de onda  $k$ .
- b) El calor específico en los límites de alta y baja temperatura.