

FISICA 4

7 de diciembre de 2011

PARTE I: TERMODINAMICA

SERIE DE PROBLEMAS

Profesor Roberto C. Bochicchio

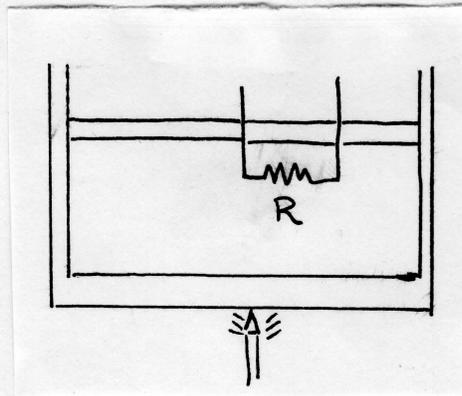
Serie 1

Conceptos de Equilibrio y Procesos. Escala termométrica: termometría

1. Estado de equilibrio: El resorte del que cuelga una pesa presenta una elongación x . Un tiempo después, se observa que la elongación del resorte ha variado (la pesa sigue siendo la misma), pero también se observa que la temperatura ambiente ha variado. ¿Podemos asegurar que el estado inicial era de **no equilibrio**? ¿Podemos asegurar que el estado inicial era de **equilibrio**?

2. Pared adiabática: En un recipiente provisto de una tapa se pone agua de la canilla y un pedazo de hielo. En ningún momento se mueve la pared del recipiente. Una hora después se observa que la mitad del hielo se fundió. Diez horas más tarde se observa que no se fundió más hielo. La temperatura del ambiente es de 20°C . ¿Es adiabática la pared del recipiente? Si lo es, ¿por qué varía el estado del sistema encerrado en él durante la primera hora?

3. Un sistema encerrado en un recipiente provisto de un pistón que puede moverse libremente, incluye una resistencia eléctrica, como indica la figura. Conectando una pila durante un minuto entre los bornes de la resistencia, observamos que el pistón sube hasta una cierta altura h . Luego se desconecta la pila y se coloca debajo del recipiente un mechero encendido, observando que el pistón no varía más su posición. ¿Es adiabático el recipiente? ¿Por qué?



4. Pared diatérmica: Se dispone de dos recipientes. El primero contiene 10 gramos de agua y hielo (sistema A). El segundo contiene 20 kg. de agua y hielo (sistema B). Los dos recipientes se ponen en contacto y se observa que ni el sistema A, ni el B varían su estado. ¿Puede deducir a partir de estas observaciones que las paredes de los recipientes **no** son diatérmicas? ¿Cómo podría comprobar si lo son? Temperatura del ambiente: 20°C .

5. Equilibrio térmico: Si se colocan en un balde lleno de agua, un termómetro de mercurio y una piedra, y se deja transcurrir el tiempo necesario para que la longitud de la columna de mercurio no varíe. ¿Qué ley asegura que si se toman el termómetro y la piedra fuera del agua y se los pone en contacto, la columna de mercurio no variará su longitud?

6. Una serie de mediciones de los volúmenes que ocupan un mol de un gas mantenido a la temperatura constante T_o , en función de la presión, arroja la siguiente tabla:

$p(\text{atm})$	1	2	3	4	5
$V(\text{l})$	30,0	15,0	9,9	7,2	5,1

a) Hacer el gráfico correspondiente para obtener la zona en que el gas se comporta como ideal.

b) ¿ Cuanto vale T_o ?

7. La resistencia de un alambre de platino es de 7000Ω a la temperatura del hielo fundente (0°C); 9.705Ω a 100°C y 18.387Ω a $444,6^\circ\text{C}$ (punto del azufre). La resistencia se parametriza por medio de la ecuación:

$$R(T) = R_o(1 + aT + bT^2)$$

siendo R_o , a y b , constantes.

a) Hallar los valores de R_o , a y b .

b) Supongamos que el alambre se utiliza como termómetro, siendo la resistencia la propiedad termométrica, pero que se calibra usando sólo los puntos del hielo y del vapor de agua, expresando una función lineal de la temperatura. Hallar la temperatura que se mediría para el punto del azufre.

8. Un termómetro de mercurio, graduado linealmente, se sumerge en hielo fundente. El mercurio queda enrasado en la división -2 . En vapor de agua hirviente, a la presión de 76 cm de mercurio, queda envasado en la división $+103$.

a) En un baño tibio, el mercurio alcanza la división $n = +70$. Determinar la temperatura θ del baño, que indica este termómetro.

b) De manera más general, determinar la corrección a efectuar sobre la lectura de la división n en la forma $\theta - n = f(n)$. Deducir la temperatura θ para la cual no es necesaria ninguna corrección.

9. La ecuación termométrica de un termómetro de resistencia de platino es, entre 0°C y 630°C , de la forma

$$R = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$$

donde R es la resistencia del hilo de platino a la temperatura Celsius t . Los valores de los parámetros son: $A_0 = 2,0\Omega$, $A_1 = 8,12 \cdot 10^{-3}\Omega \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ y $A_2 = -1,20 \cdot 10^{-6}\Omega \text{ } ^\circ\text{C}^{-2}$,

a) Expresar la diferencia $\theta - t$ entre la temperatura centesimal lineal θ definida por este termómetro y la temperatura Celsius t , en función de t

b) Determinar a que temperatura t_1 , la diferencia $\theta - t$ posee un valor máximo. Deducir esta diferencia máxima.

10. Los gases reales en primera corrección al caso ideal obedecen la *ecuación de estado de van der Waals*

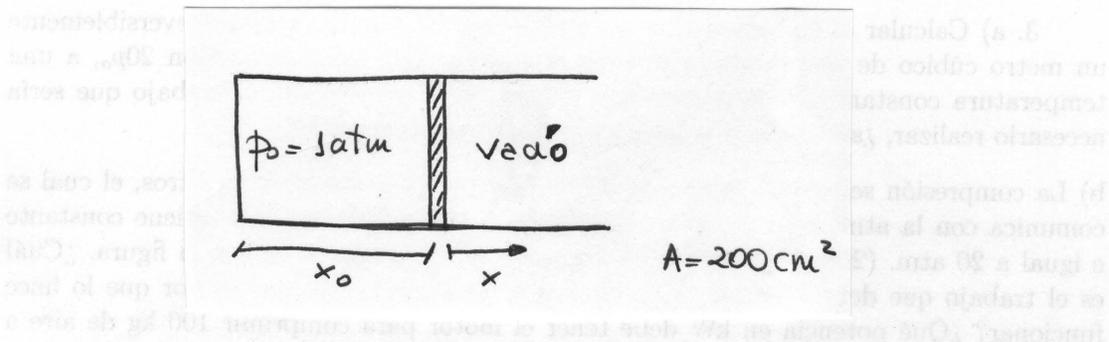
$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) = R T$$

y se emplean en termómetros de gas a presión constante. El dióxido de carbono CO_2 lo hace a una presión $p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$. Expresar la temperatura θ por este termómetro, en la forma $\theta = t (1 + \varepsilon)$, siendo t la temperatura Celsius. Nota: Puede considerarse dado que a y b representan coeficientes que corrigen el comportamiento del gas ideal, $p_0 \gg av$ y $p_0 \gg ab$ en el rango de trabajo

Serie 2

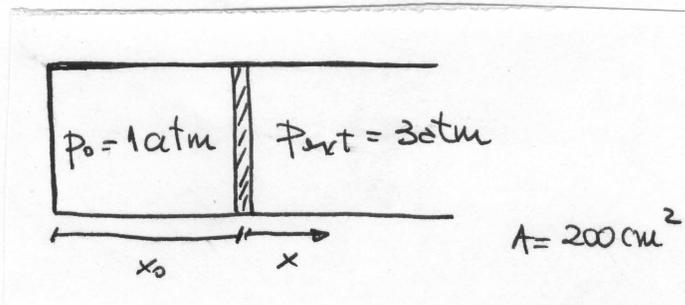
Trabajo en Procesos Termodinámicos

1. Sea un cilindro lleno de gas a $p_0 = 1 \text{ atm}$, provisto de un pistón que se halla inicialmente a una distancia x de la base. En el exterior hay vacío ($p_0 = 0$), según la figura



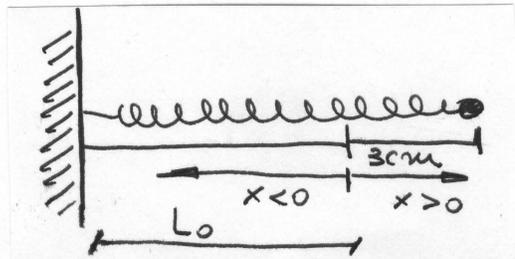
- Calcular la fuerza que actúa sobre el pistón, en módulo y dirección.
- Calcular el trabajo realizado por el gas cuando se pasa de x_0 a $x_0 + 3 \text{ cm}$

La presión exterior es ahora $p_{ext} = 3 \text{ atm}$.



- Calcular la fuerza que actúa sobre el pistón, en módulo y dirección.
- Calcular el trabajo realizado sobre el gas cuando se pasa de x_0 a $x_0 - 5 \text{ cm}$
- Calcular el trabajo realizado por el gas.

2. Se tiene un resorte estirado con una elongación de 3 cm respecto de la longitud L_0 que corresponde al resorte sin fuerzas aplicadas. La constante elástica del resorte κ vale 1 kg/cm .



i) ¿Cuanto vale en magnitud y dirección, la fuerza aplicada sobre el resorte y la fuerza de restitución del resorte? Si el resorte llega a la elongación nula en forma reversible, ¿cuanto vale el trabajo de la fuerza exterior? ¿y la de la de restitución? ¿Cuanto vale el trabajo termodinámico entregado por el resorte?

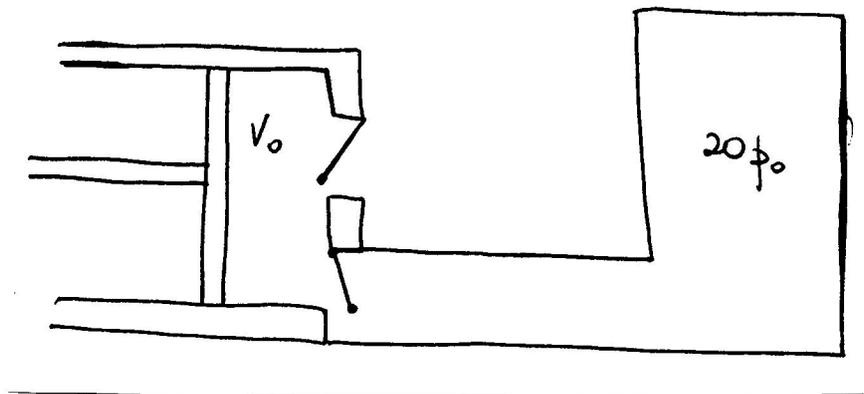
ii) Repetir el análisis anterior partiendo del resorte inicialmente comprimido con $x = -3 \text{ cm}$.

iii) Se comprime el resorte reversiblemente partiendo de $x = -3 \text{ cm}$ hasta $x = -4 \text{ cm}$, ¿cuanto valen los trabajos de la fuerza exterior y el entregado por el resorte?

Nota: preste atención especial al signo de los trabajos.

3. a) Calcular el trabajo que es necesario realizar para comprimir reversiblemente un metro cúbico de aire desde la presión atmosférica p_0 , hasta la presión $20p_0$, a una temperatura constante. Si la compresión hubiera sido irreversible, el trabajo que sería necesario realizar, ¿sería mayor o menor que en el caso reversible?

b) La compresión se realiza dentro de un cilindro de volumen $V_0 = 20$ litros, el cual se comunica con la atmósfera y con un recipiente donde la presión se mantiene constante e igual a 20 atm . ($20p_0$), mediante dos sopapas dispuestas como indica la figura. ¿Cuál es el trabajo que debe efectuar, en cada ida y vuelta del pistón, el motor que lo hace funcionar? ¿Qué potencia en kW debe tener el motor para comprimir 100 kg de aire a 20°C por hora? Suponer que el aire se comporta como un gas ideal.



4. Se tiene un mol de gas cuya ecuación de estado esta dada por

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) = R T$$

en el estado A (p_A, V_A, T_A) y se lo lleva por medio de un camino reversible dado por $p(V) = p_A + 5 \text{ atm/l} (V - V_A)$ hasta el estado B (p_B, V_B, T_B)

- a) Hallar como varía la temperatura en función del volumen durante el camino; hallar T_B .
- b) Graficar el camino en el plano pV .
- c) Calcular el trabajo entregado por el sistema

$$V_A = 10 \text{ l} \quad p_A = 1 \text{ atm} \quad V_B = 20 \text{ l}$$

$$a = 10 \text{ atm l}^2 \quad b = 1 \text{ l}$$

5. Un cilindro de volumen V , cerrado en sus dos extremos, contiene una mezcla de n_1 moles de N_2 y n_2 moles de O_2 . Un pistón semipermeable, permeable a N_2 e impermeable a O_2 está inicialmente en un extremo y es desplazado de modo que deja atrás de sí un volumen V_1 que contiene únicamente N_2 . Un segundo pistón semipermeable, permeable a O_2 e impermeable a N_2 , está al comienzo en el otro extremo y es desplazado de modo que deja atrás de sí un volumen V_2 que contiene solamente O_2 .

- a) Los desplazamientos se realizan reversiblemente y a temperatura constante T . Calcular el trabajo entregado al sistema; mostrar que esto no depende del orden en que se efectuarán los desplazamientos.
- b) ¿Cuánto vale el trabajo cuando los gases están completamente separados? ¿Para que valor de V_1/V_2 el trabajo toma un valor mínimo? ¿En este caso, que condición se cumple para las presiones?
- c) La mezcla inicial de aire es $n_1/n_2 = 4$ a la presión atmosférica ya $20^\circ C$. Calcular el trabajo necesario en las condiciones de mínimo, para separar 1 kg. de O_2 .

6. Un mol de gas ideal realiza el siguiente ciclo:

AB) se expande contra la presión exterior constante de 1 atm. y a una temperatura mantenida constante a $300^\circ K$, desde $V_A = 10 \text{ l}$ hasta $V_B = 20 \text{ l}$

BC) manteniendo el volumen en 20 l, se lleva el gas de $300^\circ K$ a $200^\circ K$ (T_C)

CD) el gas se comprime reversiblemente, a $T = T_C$, desde 20 l a 10 l ($V_D = 10 \text{ l}$, $200^\circ K$)

DA) manteniendo el volumen en 10 l se lleva el gas al estado inicial A

Calcular el trabajo en cada parte del ciclo y el trabajo total.

Serie 3

Primer Principio de la Termodinámica

1. Se tiene un sistema simple descrito por las variables termodinámicas \mathbf{x} y T . Se conoce que para cada valor de \mathbf{x} mantenido constante, la energía interna del sistema es una función monótona creciente de T : U

$$U = \mathbf{x}_o(T) \quad \text{para } \mathbf{x} = \mathbf{x}_o$$

i) el sistema pasa del estado A (\mathbf{x}_A, T_A) a otro con $\mathbf{x} = \mathbf{x}_B$ en forma adiabática reversible, realizando un trabajo W_I . ¿Cuanto vale la energía interna del sistema?

ii) si el sistema hubiese pasado del mismo estado A a tener el mismo \mathbf{x}_B , en forma adiabático pero irreversible, entregando un trabajo $W_{II} < W_I$, ¿Cuanto habrá variado la energía interna del sistema? La temperatura final alcanzada? sería igual, mayor o menor que en i)? Recordar: $U_B = U_A + \Delta U_{AB}$.

2. Se tiene un sistema simple encerrado en un cilindro, cuya ecuación de estado no se conoce. Se quiere medir la diferencia de U entre los estados $V_1 = 10 \text{ l}$, $T_1 = 300^\circ K$ y $V_2 = 20 \text{ l}$, $T_1 = 400^\circ K$. Se dispone de un cilindro provisto de un pistón aislante, pesas, arena, una resistencia eléctrica que se puede sumergir en el cilindro, un amperímetro, un voltímetro, pilas, papel de amianto (aislante térmico), trabas para el pistón, etc. ¿Como procedería en los siguientes casos ?

a) comienza con el sistema en el estado 1, aísla el cilindro y deja que se expanda contra la presión ambiente. Al llegar a $V_1 = 20 \text{ l}$, observar que la temperatura bajo a $280^\circ K$ ¿Que debe hacerse para llevarlo al estado 2? ¿Como se calcula $U(2) - U(1)$?

b) parte del estado 2 y comprime reversiblemente, hasta $V_1 = 10 \text{ l}$ ¿Como se debe proceder?, pero obtiene una temperatura superior a $400^\circ K$. ¿Es posible llegar a $300^\circ K$ con el cilindro aislado y utilizando los elementos a su disposición?

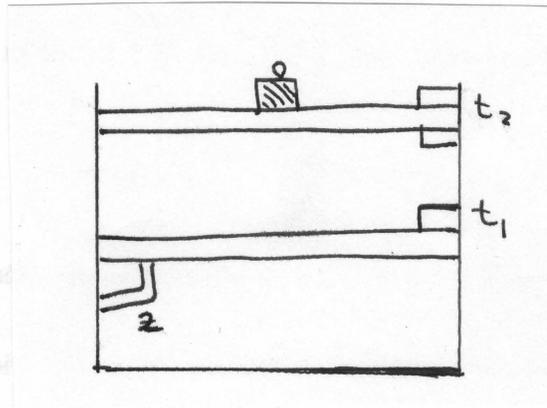
3. Un gas se halla dentro de un cilindro, provisto de un pistón sin peso que puede deslizar sin frotamiento, de 100 cm^2 de área. Tanto el cilindro, como el pistón son aislantes perfectos del calor. Sobre el pistón hay un peso de 100 gr. El gas se halla a la presión de 10 atm. y el pistón es mantenido inmóvil por medio de una traba (t1 en la figura). La presión exterior es de 1 atm.

I) en cierto instante se saca la traba t1, expandiéndose el gas hasta que el pistón es detenido por la traba t2, la cual se halla a 10 cm. por encima de t1.

a) ¿ Es reversible este proceso?

b) ¿ Cuanto vale la fuerza que impulsa el pistón hacia arriba en el instante de quitar la traba t1?

c) ¿ Cuanto vale el trabajo entregado por el gas durante la expansión? ¿ Puede usarse la expresión $W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$, siendo p la presión termodinámica del gas? ¿Por qué?



Z: zapata de freno a considerar solo para el punto II. Para el punto I. no existe.

II) Si ahora, en lugar que el pistón pueda deslizar sin frotamiento, se coloca una zapata de freno sumergida en el gas, que roza contra la pared interior del cilindro con una fuerza de 10000 dinas,

d) ¿ Cuanto valdrá ahora la fuerza que acelera el pistón hacia arriba en el instante de sacar la traba t1?

e) ¿ Cuanto vale el trabajo entregado por el gas?

f) ¿ Cuanto vale la variación de energía interna del gas en los casos I) y II) ?

4. Medio kg. de gas es comprimido a una presión constante de 7 atm. en un cilindro de 25 cm. de diámetro. El pistón se desplaza 50 cm. y pasan 5 kcal del cilindro a una camisa de agua durante la compresión. ¿Cuál es la variación de energía interna del proceso? Si hubieran salido 6 kcal desde el cilindro, cuál hubiese sido la variación de energía interna?

5. Una bolita de masa m y cuyo calor específico es de $0.1 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$ cae desde una altura de $h = 19,5 \text{ m}$, en un lugar donde la aceleración de la gravedad vale $g = 980 \text{ cm/s}^2$, sobre un plano horizontal más o menos elástico. La bolita rebota, se eleva a una altura h/n y se calienta. El plano no se calienta ni adquiere una deformación permanente. Calcular el aumento de temperatura de la bolita, suponiendo que su energía interna varía de la forma $\Delta U = c \theta$, siendo c la capacidad calorífica y θ la variación de temperatura. Analizar los valores que puede tomar n , los valores máximos y mínimos posibles de θ , y en particular calcular numéricamente el valor de θ para $n = 9$.

6. Un mol de gas diatómico ($U = cte. + 5/2 R T$) es llevado de un estado inicial

cuya temperatura y volumen son, respectivamente, $291^{\circ}K$ y 21000cm^3 , a un estado final en el cual la temperatura y el volumen son $305^{\circ}K$ y 12000cm^3 . La transformación está representada en el plano pV por una línea recta.

a) ¿Es reversible la transformación? ¿Por qué?

b) Encontrar el trabajo realizado y el calor absorbido por el sistema.

7. Un gas tiene la ecuación de estado: $p = \left(\frac{RT}{V}\right) \left(1 + \frac{aT}{V}\right)$, siendo su energía interna de la forma:

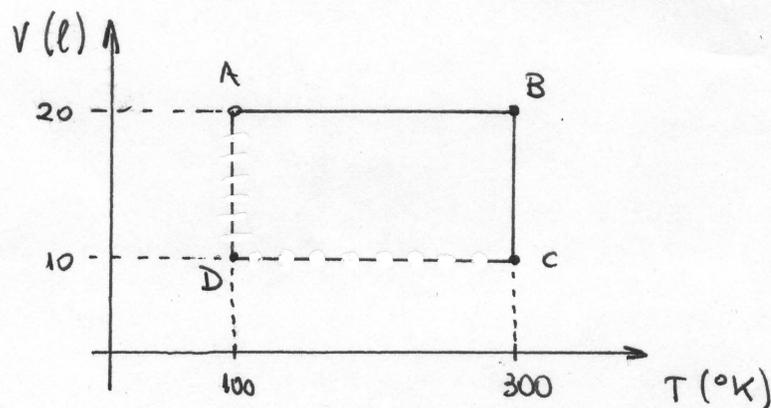
$$\dot{U}(V, T) = U_o(T) + \frac{RaT^2}{V}; \quad a = \text{cte.}$$

a) Hallar el trabajo entregado por el gas durante una expansión isotérmica reversible desde V_o hasta $3V_o$.

b) Idem durante una expansión isotérmica contra una presión exterior constante p_o , desde V_o hasta $3V_o$.

c) Hallar la variación de energía interna y el calor absorbido por el gas en los casos a) y b).

8. Un mol de gas diatómico ($U = \text{cte.} + 5/2 RT$), realiza el proceso A B C.



Calcular:

a) el trabajo W realizado por el gas, la variación ΔU de energía interna y el calor absorbido Q para los procesos AB y BC.

b) ¿Cuál es la variación de energía interna al pasar del estado C al A?

c) si al ir de C a A por un camino especificado, el gas realiza un trabajo $W = -10$ joule, ¿ cuál es el calor absorbido en ese proceso?

9. Un cilindro lleno de gas está provisto de un pistón y paletas agitadoras que pueden ser operadas externamente. Notemos con \mathbf{x} y \mathbf{f} la posición y la fuerza que se ejercen sobre el pistón. Consideremos dos procesos I y II. Ambos comienzan en $\mathbf{x} = 0,2\text{m}$ y terminan en $\mathbf{x} = 0,3\text{m}$ y en ambos casos \mathbf{f} permanece constante e igual a 1000 N . En el proceso I el cilindro se mantiene aislado adiabáticamente y se gastan 250 J en remover el gas con las paletas. En el proceso II el cilindro no es aislado adiabáticamente y se gastan 350 J en hacer girar las paletas. Para cada uno los procesos calcule:

a) el trabajo hecho por el sistema

b) el cambio de energía interna

c) el calor intercambiado

10. Se comprime un mol de aire desde $p = 1\text{ atm}$, $T = 273^\circ\text{K}$ en forma reversible e isotérmica hasta reducir su volumen a la mitad, y luego se expande adiabática y reversiblemente hasta su presión inicial. Hallar: a) el trabajo total realizado por el gas, b) el calor total que ha sido entregado al gas, c) la variación de energía interna, d) la temperatura final, e) graficar el proceso en el plano pV .

Serie 4

Aplicaciones del Primer Principio - Entalpía

1. Experimentalmente se observa que se puede pasar del estado A de un sistema no simple a otro estado B en forma adiabática y con $p_i = p_f = p_{ext} = cte.$. ¿Qué se puede asegurar respecto a la diferencia de entalpía entre los estados A y B, es decir cuanto vale $H(A) - H(B)$? ¿Por qué?

Si ahora se pasa del estado A al B por cualquier camino no adiabático, $p_{ext} \neq cte.$, realizando otras reacciones químicas, etc., ¿Qué se puede asegurar acerca de $H(A) - H(B)$? ¿Por qué?

2. El calor molar a presión constante, C_p , de muchas sustancias (excepto a muy bajas temperaturas) puede expresarse satisfactoriamente por la fórmula empírica: $C_p = a + 2bT - cT^{-2}$, en el cual a , b y c son constantes y T es la temperatura en grados Kelvin.

a) Hallar el calor requerido para elevar la temperatura de n moles de la sustancia, a presión constante, desde T_1 a T_2 , en función de a , b y c .

b) Hallar el calor específico promedio.

3. a) ¿Por qué es válida la expresión $dU = n C_V dT$ para una evolución a volumen constante, mientras que $dU \neq n C_p dT$ para una evolución a presión constante?

b) ¿Por qué la expresión $dU = n C_V dT$ es válida para un gas ideal, independientemente que el proceso sea adiabático, a volumen constante, a presión constante, etc.? ¿Ocurre lo mismo para una sustancia cualquiera?

4. Un gas de van der Waals es aquel que se comporta en el equilibrio según la ecuación de estado: $\left(p + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) = R T$ siendo $U(T, V) = C_V T + \frac{a}{V}$

I) se deja expandir un mol de gas, en forma adiabática y contra presión exterior nula desde el punto A (V_A, T_A) hasta B ($V_B = 2V_A$). Hallar:

a) ΔU_{AB}

b) T_B

II) se comprime el gas en forma isotérmica reversible desde B hasta C ($V_C = V_A$)

c) W_{BC}

d) ΔU_{BC}

e) Q_{BC}

III) se vuelve el gas en forma reversible a V constante desde C a A.

f) Q_{CA}

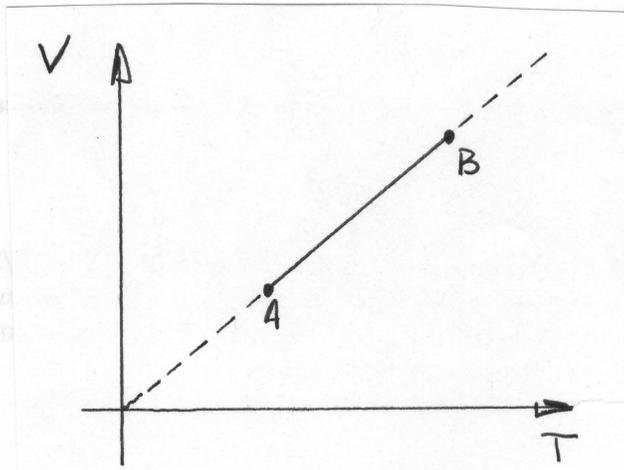
g) W entregado en el ciclo

5. Decir si la variación de entalpía es o no igual al calor recibido por el sistema (con su signo), para cada uno de los siguientes casos:

a) un gas se halla comprimido a 10 atm. en un cilindro adiabático. La presión exterior es constante e igual a 1 atm. Se deja el pistón en libertad, hasta que alcanza el equilibrio con la atmósfera.

b) expansión adiabática reversible del mismo gas.

c) un mol de gas ideal realiza el proceso descrito en el diagrama, pasando de A a B:



d) una reacción química irreversible, a presión atmosférica, en un recipiente de cobre cuya base se halla en un baño de hielo.

6. Un mol de un gas se halla encerrado en un cilindro adiabático, provisto de un pistón también adiabático. En el estado inicial el pistón se halla trabado, el volumen es $V_A = 1$ l y la temperatura $T_A = 300^\circ K$. El gas se expande contra presión nula hasta que

su volumen alcanza $V = 2$ l, donde se vuelve a trabar el pistón. La ecuación de estado del gas es:

$$p(V, T) = \frac{RT}{V} - \frac{a}{V^2} \quad R = 0,082 \frac{\text{l atm}}{\text{mol } ^\circ\text{K}}$$

y la energía interna depende de T y V, según:

$$U(V, T) = 5/2 RT - \frac{a}{V} \quad a = 0,082 \text{ atm l}^2$$

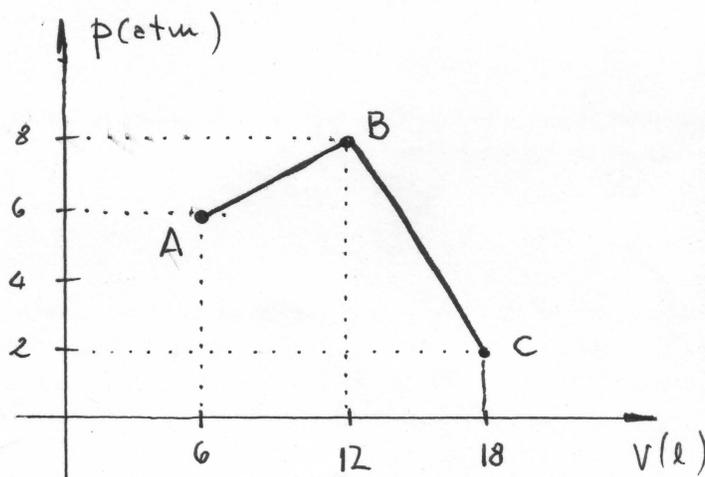
- ¿es el proceso reversible? ¿Por qué?
- ΔU_{AB}
- T_B
- p_B
- ΔH_{AB}
- C_V

7. La ecuación de estado para un gas real de van der Waals es

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) = RT$$

siendo $dU(T, V) = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV$. Hallar la ecuación de las adiabáticas para este gas.

8. Un gas ideal diatómico tiene energía interna molar $U = 5/2RT$ que depende solamente de su temperatura absoluta T . Se deja evolucionar un mol de este gas reversiblemente del estado A al estado B y de este al estado C a lo largo de los caminos rectos representados en el diagram pV de la figura

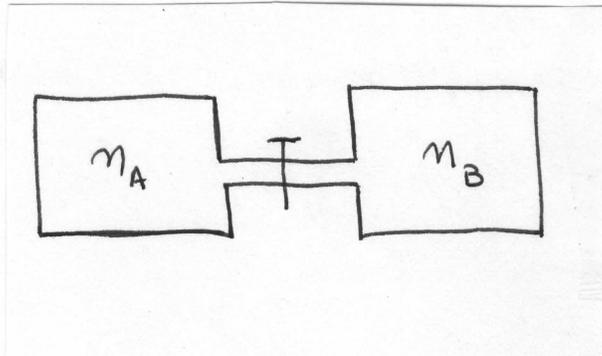


- a) ¿Cuál es la capacidad calorífica molar a volumen constante de este gas?
- b) ¿Cuál es el trabajo total realizado por el gas en el proceso A B C ?
- c) ¿Cuál es el calor absorbido por el gas en este proceso?

9. Se tiene un dispositivo de Joule del tipo indicado en la figura. El mismo contiene un gas de van der Waals con n_A moles en el compartimiento de la izquierda y n_B moles en el compartimiento de la derecha. Ambas están a la misma temperatura T_1 . el volumen de cada compartimiento es V .

a) Hallar la expresión de la temperatura del sistema cuando se abre la llave y se alcanza un nuevo estado de equilibrio. Despreciar cualquier pérdida de calor de los recipientes.

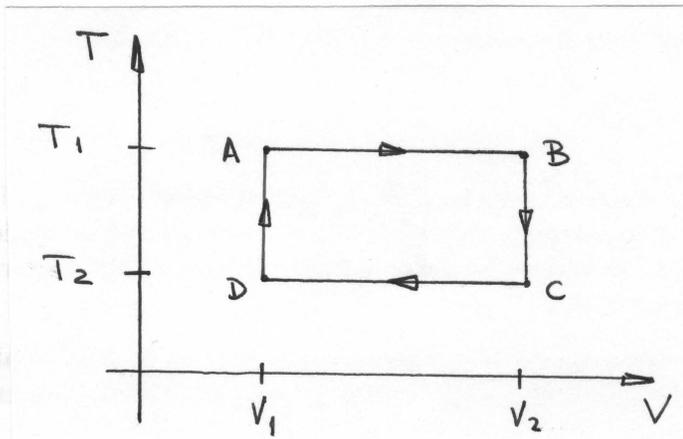
b) Hallar la expresión de T para los casos particulares: $n_A = n_B$ y $n_B = 0$.



Serie 5

Segundo Principio de la Termodinámica - Entropía

1. Un mol de gas ideal diatómico realiza el siguiente ciclo reversible



- calcular $\int \frac{\delta Q_R}{T}$ para los procesos AB, BC, DA y compruebe que la suma es nula
- ¿Cuánto vale $S(C) - S(A)$?
- ¿Se puede pasar en forma adiabática de A a C si $T_1 = 500^\circ K$, $V_1 = 5 \text{ l}$ y $T_2 = 300^\circ K$, $V_2 = 30 \text{ l}$?

2. ¿Que se puede decir de la $\int_A^B \frac{\delta Q_R}{T}$ para:

- un proceso reversible
- un proceso irreversible
- un proceso adiabático

3. Un mol de gas de van der Waals se expande en forma reversible y a presión constante, desde un volumen inicial V_A hasta un volumen final V_B . Datos: p_A , V_A , T_A , V_B , $p_A = p_B$,

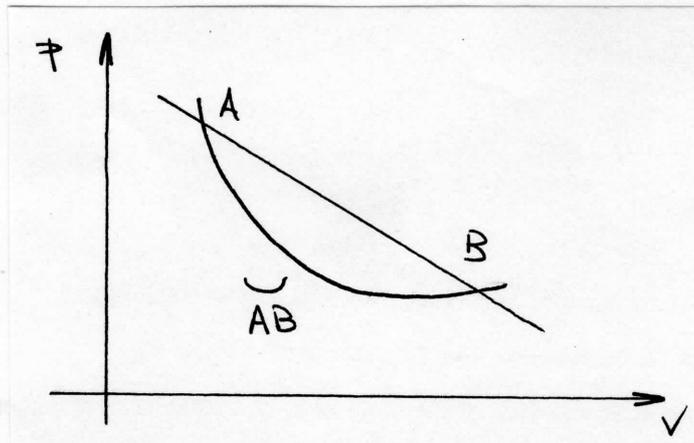
$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) = R T$$

$$U(T, V) = C_V T + \frac{a}{V}$$

- Hallar T_B
- Hallar la variación de energía interna entre los estados A y B
- Hallar el calor absorbido durante la expansión
- Hallar la variación de entropía entre los estados A y B

Recomendación: Utilice un camino a temperatura constante hasta llegar al volumen final, completando con un camino a volumen constante.

4. Un gas ideal evoluciona siguiendo el ciclo de la figura

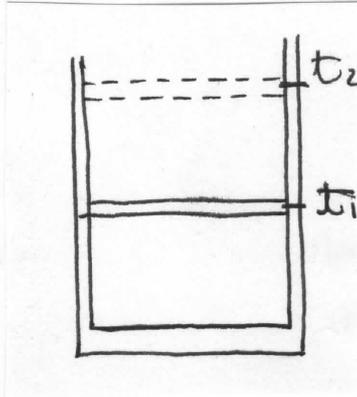


La curva $\overset{\frown}{AB}$ es una isoterma. Suponer que p_A , V_A , T_A , p_B y V_B son datos.

- Calcular la variación de entropía cuando el gas se expande reversiblemente siguiendo la recta AB. Hacer el cálculo explícito.
- Calcular la variación de entropía cuando el gas se expande reversiblemente siguiendo la isoterma.
- Calcular la variación de entropía cuando el gas pasa irreversiblemente de B a A.

5. Un mol de gas ideal diatómico ($C_V = 5/2 R$) se halla en un recipiente adiabático provisto de un pistón en el estado A ($V_A = 2 \text{ l}$, $T_A = 300^\circ \text{K}$). Se saca la traba que retiene

el pistón t_1 y el gas se expande contra la presión exterior constante de 1 atm., hasta el volumen V_B , donde se encuentra otra traba para el pistón t_2 .



Calcular:

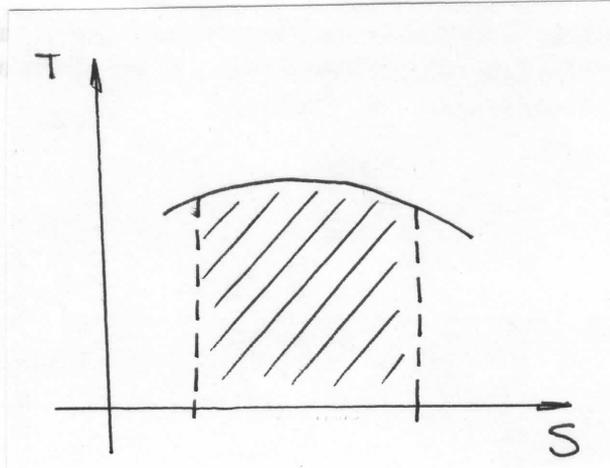
- W_{AB}
- ΔU_{AB}
- $T_B = f(V_B)$

La entropía del gas vale:

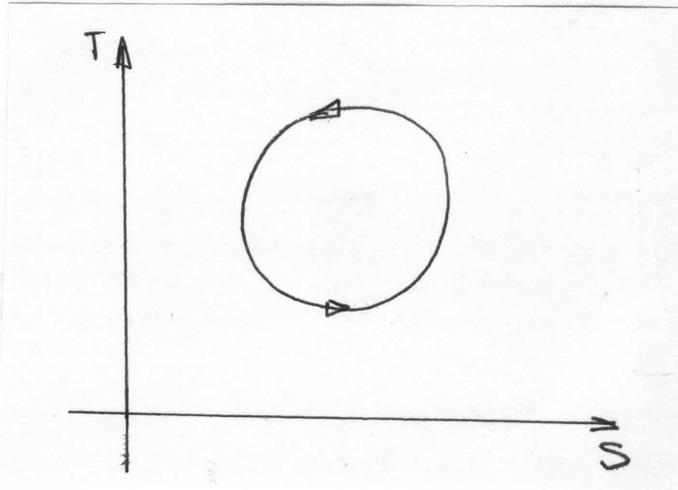
$$S(T, V) = S(300^\circ K, 2 \text{ l}) + T \ln\left(\frac{V}{2 \text{ l}}\right) + C_V \ln\left(\frac{T}{300^\circ K}\right)$$

- $S_B - S_A$
- Hallar el valor de V_B que hace máxima la entropía total V_{B^0}
- Hallar la presión termodinámica del gas cuando $V_B = V_{B^0}$
- ¿Que puede deducir respecto al volumen final que alcanzaría el gas en el equilibrio si, cuando el gas se hallaba en A se sacan ambas trabas?

6. a) ¿Que se obtiene calculando el área bajo la curva, en un diagrama T-S?



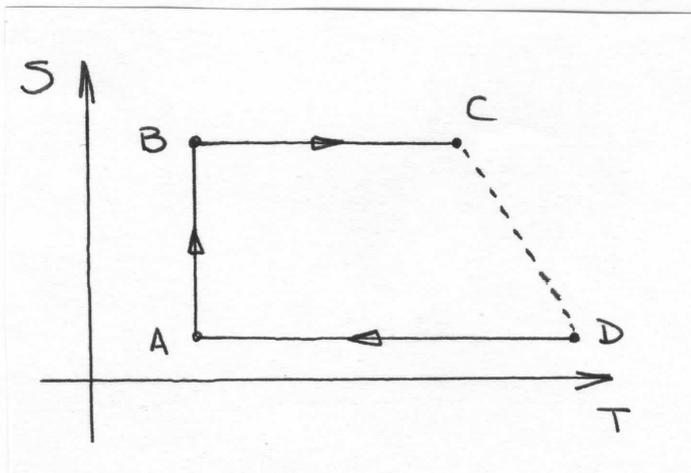
b) Si se realiza el siguiente ciclo



¿Cuanto vale la variación de energía interna?

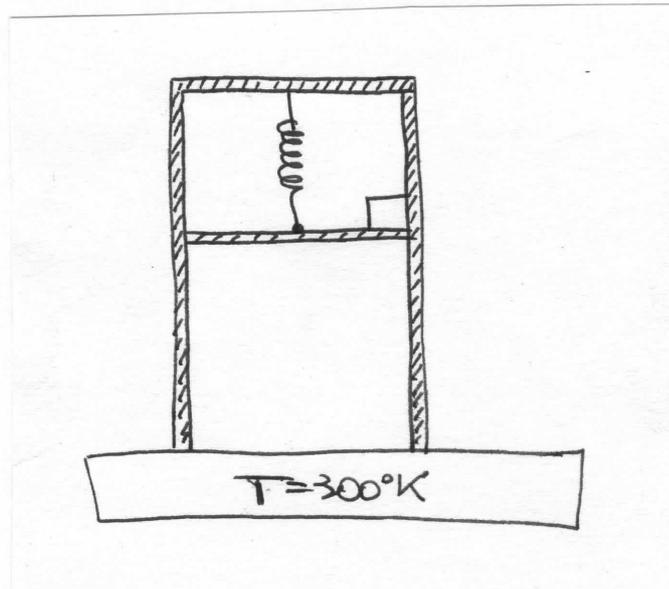
c) ¿Como es el gráfico en el diagrama T-S de un proceso adiabático y uno isotérmico?

d) Dado el siguiente diagrama, con la rama CD irreversible,



¿Cuál es la variación de entropía ΔS_{CD} conociendo ΔS_{AB} ? ¿Como se comparan con ΔS_{AB} , las variaciones de entropía de las fuentes para las partes AB y CD del ciclo?

7. Un cilindro aislado térmicamente excepto en su base que se halla en contacto con una fuente a $T = 300^\circ K$. Este cilindro está provisto de un pistón adiabático que está unido al extremo de un resorte como indica la figura.



El cilindro contiene un mol de gas ideal monoatómico a una presión inicial de 2 atm. estando el pistón trabado y el resorte no deformado. La presión exterior es constante e igual a 1 atm. Se suelta la traba y se deja que el gas expanda hasta alcanzar la nueva posición de equilibrio.

- ¿ Cuanto vale el trabajo entregado por el gas?
- ¿ Cuanto vale el calor intercambiado con la fuente ?
- ¿ Cuanto vale la variación de entropía del gas?
- ¿ Cuanto vale la variación de entropía del universo?

Nota: en un proceso puramente mecánico no hay variación de entropía.

Datos: $k = 10 \frac{kg}{cm}$ (constante elástica del resorte); $A = 100 \text{ cm}^2$ (área del pistón); 1 atm = $10^5 \frac{N}{m^2}$; $g = 10 \frac{m}{seg^2}$

8. Se tiene un cilindro aislado térmicamente excepto en las bases que son diatérmicas. El cilindro está dividido en dos partes por un pistón adiabático que puede deslizar sin rozamiento y contiene un gas ideal diatómico. La base del compartimiento B está siempre en contacto con una fuente a temperatura $T = 10^{\circ}\text{C}$. Se suministra calor a través de la base A, hasta que la temperatura en dicho recinto es de 67°C .

- ¿Como se puede realizar el proceso de suministrar calor en forma reversible?
- Calcular Q_A
- Calcular Q_B
- Calcular la variación de entropía del sistema y del universo.

Datos:

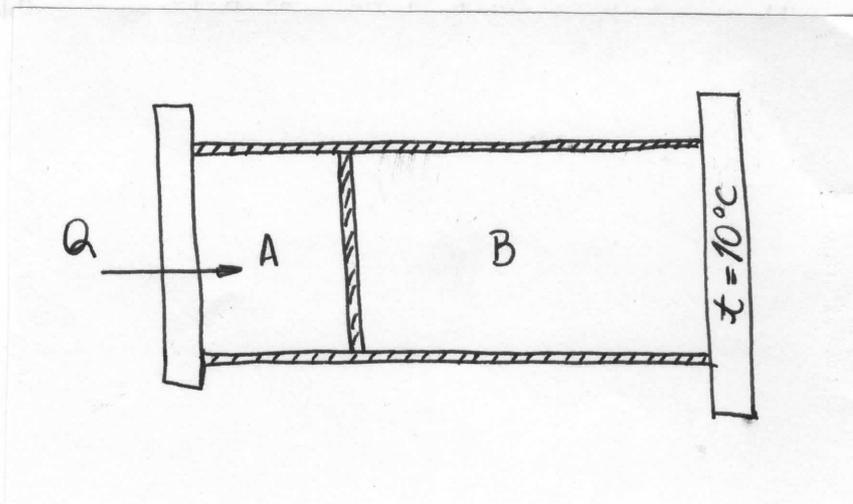
$$T_A^o = T_B^o = 10^{\circ}\text{C}$$

$$T_A^f = 67^{\circ}\text{C}$$

$$V_A^o = 5 \text{ l}$$

$$V_B^o = 11,5 \text{ l}$$

$$p_o = 2 \text{ atm}$$



Serie 6

Teorema de Clausius - Ciclos

1. Utilizando la convención gráfica según la cual una máquina simple que entrega trabajo positivo se esquematiza (ver Figura 1)

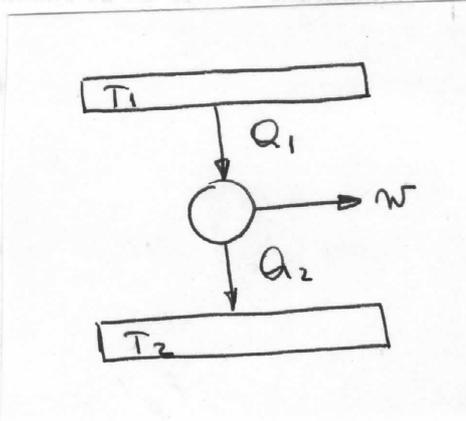


Figura 1

- Dibujar el gráfico para una estufa eléctrica
- Idem para una heladera (cuál sería en la práctica la fuente fría y cuál la caliente)
- ¿Es posible una máquina como indica la Figura 2? ¿Podría ser reversible? (fijarse que ocurre si se invierte el sentido de las flechas)

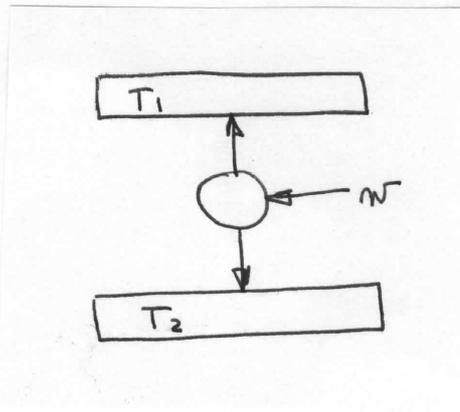


Figura 2

- ¿Es posible una máquina como indica la Figura 3? Si no, ¿Cual principio se viola?

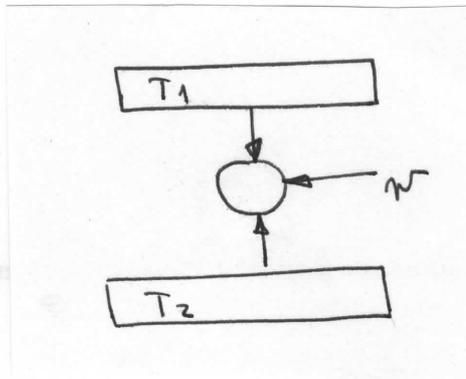


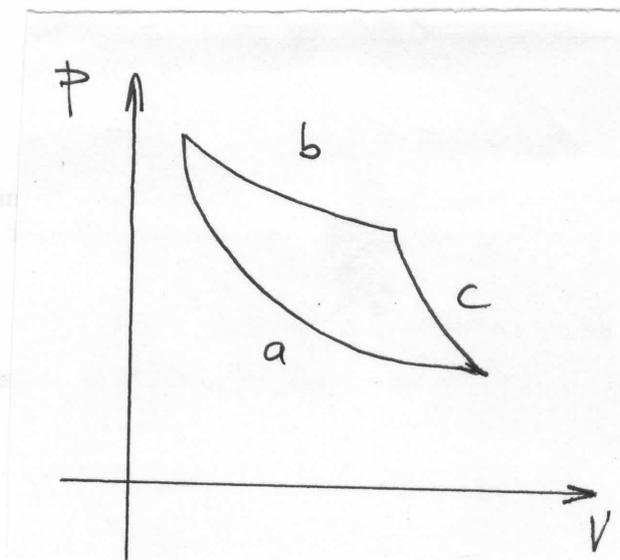
Figura 3

2. Se tiene el siguiente ciclo irreversible, realizado por un mol de gas ideal:

Estado A: el gas se halla en equilibrio en contacto con una fuente a $500^{\circ}K$ y ocupando un volumen de 10 l. Se expande en forma reversible isotérmica hasta un volumen de 20 l. (**Estado B**). Se traba el pistón. Se pone el gas en contacto con una fuente térmica a $200^{\circ}K$ y se espera que llegue el equilibrio con el pistón trabado (**Estado C**). Se lo comprime en forma isotérmica irreversible, con una presión externa aplicada de 3 atm., hasta que alcanza el volumen de 10 l. (**Estado D**). Se traba el pistón, y se vuelve a poner el gas en contacto con la fuente a $500^{\circ}K$ alcanzándose el **estado A**.

Calcule el trabajo entregado en el ciclo y piense una manera de realizar el ciclo "al revés", es decir, que el gas vaya de A a D, luego de D a C, de C a B y finalmente a A. Observar que el trabajo entregado será distinto que el correspondiente al ciclo "al derecho" cambiado de signo.

3. Demostrar que en la naturaleza no puede haber una máquina que siga un ciclo como el que muestra la figura que sigue



Las líneas **a** y **c** son adiabáticas reversibles, la línea **b** es una isoterma.

4. Una máquina térmica trabaja entre $T_1 = 400^\circ K$ y $T_2 = 200^\circ K$, extrayendo en cada ciclo 10 kcal., de la fuente de calor a T_1 . La eficiencia de la máquina es un 40 % de la máxima posible. Hallar:

- a) el trabajo por ciclo
- b) el calor entregado a la fuente de calor a T_2 , por ciclo.

5. La máquina térmica de una "heladera a gas" intercambia calor con las tres fuentes de calor siguiente:

I) una llama de gas, que se puede considerar como una fuente de calor a $700^\circ K$, y de la que absorbe Q_1 .

II) una cámara frigorífica, de la que absorbe el calor Q_2 , y a la que se puede considerar como una fuente de calor a $-10^\circ C$. Esta temperatura se mantiene constante, porque la máquina debe absorber la misma cantidad de calor por ciclo, que el que entra a la cámara en el mismo tiempo, debido a la aislación no perfecta.

III) el aire de la habitación en que se halla la heladera, que constituye una fuente de calor a $20^\circ C$ y al que entrega calor (absorbe un Q_3 negativo).

La máquina térmica no recibe ni entrega trabajo.

a) si la pérdida a la cámara por mala aislación vale 30 cal/min., y la máquina térmica realiza 100 ciclos/min., hallar cuanto debe valer Q_2 /ciclo

b) y el mínimo valor de Q_1 /ciclo que debe absorber por ciclo

6. Una máquina frigorífica reversible de Carnot absorbe calor de una masa de agua a $0^\circ C$ y lo cede a una habitación que está a $27^\circ C$. Se quiere transformar 100 kg. de agua a $0^\circ C$ en hielo $0^\circ C$.

a) ¿ Cuántas calorías son cedidas a la habitación?

b) ¿ Que trabajose requiere para este proceso? Expresarlo en Joules.

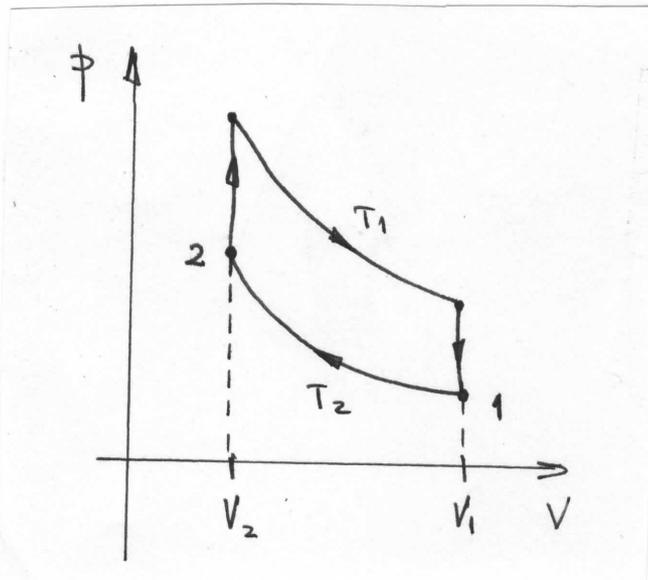
Datos: $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ Joule}$

$$\Delta H_{\text{solidificacion (agua)}} = -79,7 \text{ cal/g}$$

7. Calcular la variación de la eficiencia de una máquina reversible cuando:

- a) se aumenta la temperatura de la fuente superior en ΔT
- b) se disminuye la temperatura de la fuente inferior en ΔT
- c) ¿Cuál cambio produce un mayor aumento de la eficiencia?

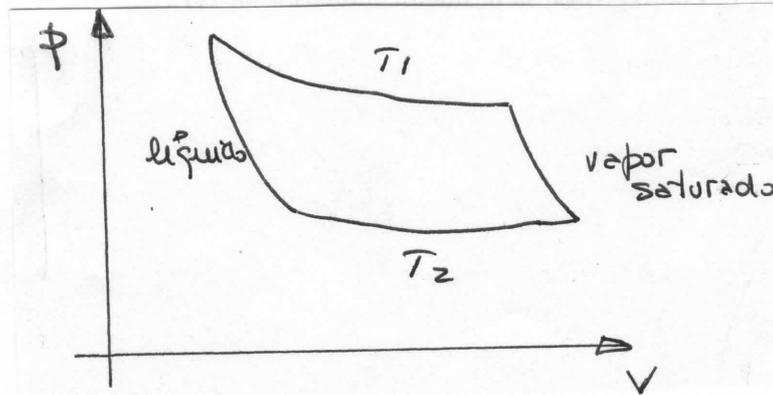
8. El ciclo de Stirling se realiza mediante dos procesos isotérmicos y dos isocoros. Para un gas ideal, según el gráfico



- a) dibujar el ciclo en el plano T-S, suponiendo que la sustancia es un gas ideal
- b) demostrar que $Q_{23} = -Q_{41}$
- c) hallar la eficiencia

c) hallar la eficiencia

9. La figura representa un ciclo de vapor saturado



a) dibujar el diagrama T-S

b) utilizar la expresión matemática del segundo principio para calcular la eficiencia

Serie 7

Potenciales termodinámicos - Ecuaciones de estado - Ecuaciones de Maxwell

1. Demostrar que para el gas que cumple

$$p = \frac{RT}{V} \left(1 + \frac{aT}{V} \right)$$
$$U(T, V) = U_o(T) - \frac{aRT^2}{V}$$

dU y dS son diferenciales exactos.

2. ¿ Puede existir una sustancia cuya ecuación de estado es:

$$p = \frac{RT}{V} - \frac{a}{V^2}$$

y cuya energía interna vale

$$U(T, V) = U_o(T, V) + C_V T - \frac{a}{V} ?$$

3. Sea un gas de van der Waals: $\left(p + \frac{n^2 a}{v^2} \right) (v - nb) = n R T$

a) mostrar que $\frac{\partial C_V}{\partial V} |_T = 0$

b) hallar $S(T, V)$ suponiendo $\frac{\partial C_V}{\partial T} |_V = 0$ salvo constante aditiva

c) hallar $U(T, V)$

4. Demostrar que $\frac{\partial U}{\partial V} |_T = 0$ en un sistema cuya ecuación de estado es $pV = nRT$

5. Decir si son posibles los siguientes procesos realizados a T y p constantes:

a) una sustancia pura pasa de la fase 1 a la 2 a $p_o = 1 \text{ atm.}$ y $T_o = 300^\circ K$. El $\Delta H_{p_o, T_o}(1-2) = 100 \text{ cal/mol}$, $\Delta S_{p_o, T_o}(1-2) = 1 \text{ cal/mol}^\circ K$

b) Idem con $\Delta H_{p_o, T_o}(1-2) = 200 \text{ cal/mol}$, $\Delta S_{p_o, T_o}(1-2) = 0,5 \text{ cal/mol}^\circ K$

c) Idem con $\Delta H_{p_o, T_o}(1-2) = 300 \text{ cal/mol}$, $\Delta S_{p_o, T_o}(1-2) = 1 \text{ cal/mol}^\circ K$

6. En un sistema mantenido, a T y V constantes, cuya función de Helmholtz depende de T y V y de otra variable adicional \mathbf{x} , de la forma

$$A = A_o + B T \mathbf{x}^2 - C \mathbf{x} V^2 \quad A_o, B, C \text{ ctes. positivas}$$

a) ¿A qué valor de \mathbf{x} corresponderá el equilibrio del sistema si $T = T_o$ y $V = V_o$?

b) ¿Cuál será la ecuación de estado del sistema $p = p(T, V)$ para \mathbf{x}_o mantenido constante?

7. Un mol de una sustancia se halla en la fase 1 a la temperatura T_o mayor que T_t , donde T_t es la temperatura de transición de la fase 1 a la 2, a la presión de 1 atm. Se la pone en contacto con una fuente de calor a la temperatura T_1 menor que T_t , manteniendo la sustancia a la presión de 1 atm.

Datos: $T_o, T_t, T_1, \Delta H_{T_t, 1 \text{ atm}}$ y los calores específicos que se necesiten.

Cuando el sistema, siempre en contacto con la fuente de calor a T_1 halla llegado al equilibrio, evaluar:

a) ΔH_{sust}

b) ΔS_{sust}

c) $\Delta S_{fuente \text{ a } T_1}$

d) en las condiciones en que se realiza el proceso, y sin conocer los calores específicos ni el $\Delta H_{T_t, 1 \text{ atm.}}$, indicar cual de las siguientes afirmaciones son ciertas

$$\Delta E_{sust} \leq 0$$

$$\Delta S_{sust} \geq 0$$

$$\Delta G_{sust} \leq 0$$

$$\Delta A_{sust} \leq 0$$

$$\Delta H_{sust} = Q_{abs}$$

8. La función de Gibbs para un mol de cierto gas está dada por:

$$G = RT \ln p + A + B p + \frac{1}{2} C p^2 + \frac{1}{3} D p^3$$

donde A, B, C, D, son funciones solo de la temperatura.

a) encontrar la función de estado del gas

b) expresar las demás funciones termodinámicas en función de p, A, B, C, D y sus derivadas.

9. A una temperatura de $10^\circ C$ y una presión de 1 atm. se tienen los siguientes valores para una reacción



$$\Delta H = 1,530 \text{ kcal/mol}$$

$$\Delta S = 5,65 \text{ cal/mol } ^\circ K$$

a) ¿ Es espontánea esta reacción a $10^\circ C$?

b) ¿ Cuánto valdrán $\Delta H(T)$ y $\Delta S(T)$ a 1 atm. y a $T \neq 10^\circ C$? ($C_p(\text{hielo}) = 0,5 \text{ cal/mol } ^\circ C$, $C_p(\text{agua}) = 1,0 \text{ cal/mol } ^\circ C$)

c) despreciando ahora la variación de ΔH y ΔS con la temperatura, calcular la temperatura de equilibrio hielo-agua a 1 atm.

10. Se tiene un mol de líquido que se transforma en vapor a la temperatura $T_{vap} = 300^\circ K$ si la presión es de 1 atm.

$$\Delta H_{l,v}(300^\circ K, 1 \text{ atm.}) = 2500 \text{ cal/mol}$$

$$C_p(liq) = 15 \text{ cal/mol } ^\circ C$$

$$C_p(vap) = 7/2 R$$

$$V_{liq} = 20 \text{ cm}^3/\text{mol}$$

El líquido se halla inicialmente a $250^\circ K$ y se lo pone en contacto con una fuente de calor a $400^\circ K$, en un recipiente mantenido a la presión de 1 atm.

a) Hallar la temperatura y el volumen del vapor en el estado final, suponiendo que el vapor se comporta como un gas ideal.

b) Calcular la variación de entalpía del sistema entre el estado inicial y final.

- c) ¿Cuánto es el calor intercambiado por el sistema con la fuente?
- d) ¿Cuánto varía la energía interna del sistema?
- e) ¿Cuánto varía la entropía de la fuente a $400^{\circ}K$?
- f) ¿Cuánto varía la entropía del sistema? Explicitar el camino utilizado para el cálculo.
- g) ¿Cuánto varía la entropía del universo?

Serie 8

Fases - Equilibrio químico - Propiedades coligativas

1. Se dispone de los siguientes datos para el agua líquida a $25^{\circ}C$ y presión atmosférica:

$$\beta = 256 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}C^{-1} \qquad \left(\frac{\partial\beta}{\partial T}\right)_p = 9,6 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}C^{-2} \qquad v = 1,003 \text{ cm}^{-3}/g$$

donde β es el coeficiente relativo de dilatación térmico definido por $\beta = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial T} \Big|_p$ y v es el volumen específico. Determinar el efecto de la presión sobre el C_p , es decir, calcular el valor de $\frac{\partial C_p}{\partial p} \Big|_T$ del agua en esas condiciones.

2. El agua líquida muy pura puede subenfriarse a presión atmosférica hasta temperaturas muy por debajo de $0^{\circ}C$. Suponer que se ha enfriado una masa de agua como un líquido hasta $-5^{\circ}C$. Un pequeña cristal de hielo, cuya masa es despreciable, es añadido como "perturbación" al líquido sobrenfriado. Si el de estado subsiguiente sucede adiabáticamente y a presión atmosférica constante, ¿ qué fracción del sistema se solidifica? ¿ cuál es el cambio de entropía del sistema?

3. Analizar el equilibrio de una solución saturada y el sólido de dicha sustancia disuelta por medio de la regla de las fases.

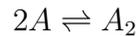
4. ¿Cuántos grados de libertad tiene un sistema compuesto por cierta cantidad de aire. Considerar que el aire está compuesto principalmente por H_2 , O_2 y N_2 . Despreciar los gases raros y el dióxido de carbono presentes en el aire.

5. ¿Cuál de las siguientes situaciones de equilibrio de fases son compatibles para sistemas no reactivos?

- a) equilibrio entre tres formas alotrópicas del hielo
- b) equilibrio entre vapor de agua, agua líquida y dos formas alotrópicas del hielo
- c) equilibrio entre dos fases de gas denso en un sistema con un número arbitrario de componentes

d) equilibrio de $(m + 3)$ fases de un sistema de m componentes.

6. Para una reacción química del tipo



la constante de equilibrio $K(T)$ de la ley de acción de masas a temperatura de $18^\circ C$ es 0.00017. La presión total de la mezcla de gases es 1 atm. Hallar el porcentaje de moléculas disociadas.

7. La constante de equilibrio de una reacción del tipo $A_2 + B_2 \rightleftharpoons 2AB$ a cierta presión y temperatura es $K(T) = 300$. Se inyectan A_2 y B_2 en concentraciones $C_1 = 0,1 \text{ mol/l}$ y $C_2 = 0,05 \text{ mol/l}$, respectivamente. Hallar la concentración de AB en el equilibrio.

8. Sabiendo que el calor de reacción para la reacción considerada en el Problema 6 es 50 kcal/mol. Calcular el grado de disociación a $19^\circ C$ y 1atm.

9. En una cámara mantenida a $1000^\circ K$ y a presión atmosférica constante se inyectan SO_2 y O_2 en concentraciones $C_1 = 0,03 \text{ mol/l}$ y $C_2 = 0,01 \text{ mol/l}$, respectivamente. ¿Cuanto SO_3 se formará en el equilibrio? La constante de equilibrio $K(T)$ a esa presión y temperatura es 282.5.

10. Calcular la presión osmótica de una solución que contiene 30 gr. de $ClNa$ por litro de agua ($T = 15^\circ C$)

11. Una solución de azúcar ($C_6H_{12}O_6$) en agua y otra de $ClNa$ en agua tienen el mismo volumen e igual presión osmótica. Hallar la relación de los pesos del azúcar y el cloruro de sodio.

Serie 9

Teoría Cinética de los Gases Ideales

1. ¿ Cuántas moléculas en un mol oxígeno tienen velocidad mayor 10^3 m/s a temperatura de (a) $100^\circ K$, (b) $1000^\circ K$, (c) $10000^\circ K$? Representar gráficamente en función de la función de distribución.

2. La función de distribución de velocidades escalares de un grupo de N partículas está definida por

$$dN_v = k dv \quad 0 < v < V$$

$$dN_v = 0 \quad V < v$$

- a) graficar de la función de distribución
- b) hallar la constante k en función de N y V
- c) hallar la velocidad media y v_{cm} en función de V
- d) realizar lo mismo que en a), b(y c) para la distribución

$$dN_v = k v dv \quad 0 < v < V$$

$$dN_v = 0 \quad V < v$$

3. En el aparato empleado para verificar experimentalmente la ley de velocidades de Maxwell (Zartman y Ko) se emplea bismuto a 827° . Si el tambor tiene 1 cm. de diámetro y gira a 6000 r.p.m., hallar el desplazamiento en la placa de vidrio de los impactos de la moléculas de Bi y Bi_2 , medido desde un punto directamente opuesto a la rendija. Suponer que las moléculas de cada especie viajan con la v_{cm} correspondiente.

4. Una ampolla esférica de 10 cm de radio se mantiene a una temperatura de $27^\circ C$, excepto en un centímetro cuadrado, que se mantiene a muy baja temperatura. La ampolla contiene vapor de agua inicialmente a una presión de 10 mm. de mercurio. Suponer que

cada molécula de agua que choca contra la superficie fría se condensa y se adhiere a ella.
¿ Cuánto tiempo se necesita para que la presión descrezca hasta 10^{-4} mm de mercurio?

5. Una molécula está constituida por cuatro átomos en los vértices de un tetraedro:
a) ¿Cuál es el número de grados de libertad para traslación, rotación y vibración de esta molécula?; b) teniendo en cuenta el principio de equipartición, ¿ qué valores tienen C_v y γ en un gas compuesto por estas moléculas?

6. ¿Cuál es la frecuencia de choque de una molécula de nitrógeno, (a) a $300^\circ K$ y presión atmosférica?, (b) ¿ y a $300^\circ K$ y presión de 10^{-6} atm. ?

7. El recorrido libre medio de las moléculas de cierto gas a $25^\circ C$ es $2.63 \cdot 10^{-5}$ m. (a) si el radio de la molécula es $2.56 \cdot 10^{-10}$ m., hallar la presión del gas, (b) calcular el número de choques que efectúa una molécula por metro de recorrido.

8. ¿ A qué presión, en mm. de mercurio, debe evacuarse un tubo de rayos catódicos para que el 90% de los electrones del cátodo, alcancen el ánodo sin chocar, el cual se encuentra distante 20 cm.?

9. Estimar el radio de la molécula de oxígeno, (a) a partir del valor experimental de la viscosidad del oxígeno $\eta_{O_2} = 19,2 \cdot 10^{-6} \text{ N seg/m}^2$, (b) a partir de los valores experimentales de K (conductibilidad térmica) y C_v (calor específico a volumen constante): $24,0 \text{ Joule/m seg } ^\circ K$ y $20,9 \text{ Joule/mol } ^\circ K$ respectivamente.

10. El recorrido libre medio de un gas es 10 cm. Considerar 10000 recorridos libres.
¿ Cuántos son mayores que; a) 10 cm; b) 20 cm; c) 50 cm; d) ¿ cuántos son mayores que 5 cm. y menores 10 cm.; e) ¿ cuántos están comprendidos entre 9.5 y 10.5 cm. de longitud? f) ¿ cuántos entre 9.9 y 10.1 cm. ? g) ¿ cuántos tienen exactamente 10.0 cm. de longitud?

11. Un grupo de moléculas de oxígeno inician sus recorridos libres simultáneamente. La presión es tal que el recorrido libre medio es 2 cm. ¿ Después de cuánto tiempo quedará aún la mitad del grupo sin haber efectuado ningún choque? Suponer que todas las moléculas tienen velocidad igual a la velocidad media y que la temperatura es $300^{\circ}K$.

12. Un tubo de 2 cm. de longitud y 10^{-4} m^2 de sección recta contiene CO_2 a presión atmosférica y a temperatura de $273^{\circ}K$. La mitad de las moléculas del gas contienen el isótopo radioactivo del carbono ^{14}C . En el instante $t = 0$ todas las moléculas del extremo izquierdo del tubo contienen el isótopo radioactivo y el número de tales moléculas por unidad de volumen decrece uniformemente hasta el valor cero en el otro extremo del tubo; a) ¿cuál es el gradiente de concentración inicial de las moléculas radioactivas?; b) ¿cuántas moléculas radioactivas cruzan inicialmente, por segundo, una sección recta del tubo en su punto medio, de izquierda a derecha?; c) ¿cuál es la velocidad inicial de difusión de moléculas radioactivas a través de la sección recta, expresada en moléculas por segundo y en microgramos por segundo?

13. Se tiene un recipiente A a temperatura $T = cte.$, que contiene un gas diatómico a una presión inicial p_0 . En la superficie del mismo se ha practicado un orificio de 2 cm^2 por donde salen moléculas de gas (horno). Frente al orificio se halla un tambor cilíndrico al cual se le ha trazado una ranura helicoidal. Dicho cilindro gira a una velocidad angular conocida ω y en el tiempo que tardan las moléculas en alcanzar la pantalla C, este ha girado un ángulo ϕ . Las moléculas que después de pasar por dicha ranura alcanzan la pantalla son las que tienen velocidad igual a v_{cm} .

a) suponiendo que la temperatura del recipiente A es conocida, hallar el ángulo girado por el cilindro

b) hallar el camino libre medio de las moléculas en el recipiente A al cabo de $t = 10$ seg.

Nota: suponer conocidas la masa m de las moléculas y el radio efectivo ρ de las mismas.

Datos: p_0, T, ω, L, m y $V_{recipiente}$

