21. Mostrar que la ecuación de Schrödinger es separable cuando el potencial de interacción $V(t)$ depende solamente del tiempo y es uniforme en el espacio. Resolver las ecuaciones resultantes cuando $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ ¿Es estacionaria la función de estado resultante?

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) + V(t)\Psi(x,t)$$

Propuesta: $\Psi(x,t) = \phi(x)\, \varphi(t)$

$$i\hbar\, \phi(x) \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi(t) \frac{d^2\phi}{dx^2} + V(t)\phi(x)\varphi(t)$$

multiplicando por $\frac{1}{\Psi}$

$$\underbrace{i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{dt}(t) - V(t)}_{\text{depende de } t \;=\; cte \equiv \alpha \;\; (2)} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^2\phi}{dx^2}}_{\text{depende de } x \;=\; cte \equiv \alpha \;\; (1)}$$

(1) $$\frac{d^2\phi}{dx^2} \phi = -\underbrace{\frac{\alpha 2m}{\hbar^2}}_{= k^2} \phi(x) \Rightarrow \phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

(2) $$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{\alpha + V(t)}{i\hbar}\right) \varphi(t)$$

$$\int \frac{1}{\varphi}\, d\varphi = \int \left(\frac{\alpha + V(t)}{i\hbar}\right) dt$$

β : cte

$$\ln|\psi| = \frac{\alpha}{i\hbar} t + \int \frac{V(t)}{i\hbar} dt + \beta$$

Si $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$

$$\psi(t) = \psi_0 \, e^{-\frac{i\alpha}{\hbar} t} \, e^{-\frac{iV_0}{\hbar\omega} \sin(\omega t)} \qquad \psi_0 = e^{\beta}$$

$$\Rightarrow \Psi(x,t) = \left(A e^{ikx} + B e^{-ikx} \right) \psi_0 \, e^{-\frac{i\alpha t}{\hbar}} \, e^{-\frac{iV_0}{\hbar\omega} \sin(\omega t)}$$