10. Proponiendo que $\phi(x) = h(x)\exp(-\beta x^2)$ es autofunción del hamiltoniano del oscilador armónico $\hat{H}$, hallar la ecuación diferencial que debe satisfacer $h(x)$. Muestre que $h(y) = y$ y $h(y) = (1-2y^2)$ con $y \equiv \sqrt{2\beta}x$ son soluciones con autovalores $3\hbar\omega/2$ y $5\hbar\omega/2$. Grafique la probabilidad de hallar la partícula en función de x y compare con el caso clásico. ¿Qué puede decir respecto de la paridad de las autofunciones de $\hat{H}$?

$$\phi(x) = h(x)\, e^{-\beta x^2}$$

$$\phi'(x) = h'(x)\,\phi_0(x) + h(x)\,\phi_0'(x)$$

$$\phi''(x) = h''(x)\,\phi_0 + 2h'(x)\,\phi_0'(x) + h(x)\,\phi_0''(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \phi(x) = E\phi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(h''(x) - 4\beta x h'(x) - 2\beta h(x) + \cancel{(2\beta x)^2 h(x)}\right) +$$

$$+\cancel{\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 h(x)} = E h(x)$$

$$h''(x) - 4\beta x h'(x) - 2\beta h(x) + \frac{E\,2m\,h(x)}{\hbar^2} = 0$$

cambio de variable $\quad y = \sqrt{2\beta}\,x$

$$\frac{dh}{dx} = \sqrt{2\beta}\,\frac{dh}{dy} \qquad \frac{d^2h}{dx^2} = 2\beta\,\frac{dh}{dy}$$

$$h''(y) - 4\beta y h'(y) - 2\beta h(y) + \frac{E\,2m\,h(y)}{\hbar^2} = 0$$

$$\beta = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

$$h''(y) - 2y\,h'(y) + h(y)\left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) = 0$$

Si $h(y) = y \Longrightarrow -2y + y\left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) = 0$

$$\Longrightarrow E = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

Si $h(y) = 1 - 2y^2$

$$-4 - 2y(-4y) + (1-2y^2)\left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) = 0$$

$$-4 + \frac{2E}{\hbar\omega} - 1 = 0$$

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega$$