1) Usen las reglas de cuantización de Wilson-Sommerfeld para encontrar los posibles valores (niveles) de energía y el espectro de emisión de una partícula de masa m que oscila armónicamente a frecuencia ω_0 en una dimensión.

2) A partir de las relaciones de incerteza, prueben que la energía mínima de un oscilador armónico 1D es $E_{min} \approx \frac{\hbar w}{2}$, donde w es su frecuencia. Analicen el resultado.

1) Usando que la regla de cuantización de Wilson-Sommerfeld es:

$$\oint p_i dq_i = n_i h \tag{1}$$

En la cual q_i es la coordenada periódica, p_i es el impulso lineal asociado a q_i, n_i es el número cuantico y h es la constante de Planck.

Luego, teniendo en cuenta la expresión para la posición de un oscilador armónico unidimensional y su derivada:

$$x = A \sin(\omega t) \tag{2}$$

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t) \tag{3}$$

Entonces podemos escribir su impulso p como

$$p = mv = m\dot{x} = mA\omega \cos(\omega t) \tag{4}$$

Y obtenemos dq (en este caso dx):

$$x = A \sin(\omega t) \tag{5}$$

$$dx = A\omega \cos(\omega t) dt \tag{6}$$

Ahora tenemos todo para calcular la integral de la ec.(1)

$$\oint p_i dq_i = \oint mA\omega \cos(\omega t) A\omega \cos(\omega t) dt = \oint mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t) dt \tag{7}$$

Integramos sobre un período (o sea, de 0 a $\frac{2\pi}{\omega}$)

$$mA^2\omega^2 \int_0^{\frac{2\pi}{w}} \cos^2(\omega t) dt = mA^2\omega^2 \int_0^{\frac{2\pi}{w}} \frac{1+\cos(2\omega t)}{2} dt = \tag{8}$$

$$\frac{mA^2\omega^2}{2}[\frac{2\pi}{\omega} + 0] = \frac{\pi}{\omega} mA^2\omega^2 = \pi mA^2\omega \tag{9}$$

Sabemos que para un oscilador armonico la energia es:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{10}$$

Utilizando que

$$k = w^2 m \tag{11}$$

y que

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= A^2\omega^2\cos^2(\omega t) = A^2\omega^2(1-\sin^2(\omega t)) \\ &= \omega^2(A^2 - A^2\sin^2(\omega t)) = (A^2 - x^2)\omega^2 \end{aligned} \tag{12}$$

Reemplazamos 11 y 12 en 10 y resulta que la energía se puede escribir como:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}mw^2x^2 = \frac{1}{2}mw^2A^2 \tag{13}$$

Entonces, podemos escribir la ecuación 9 como:

$$\oint p_i dq_i = \frac{2\pi E}{w} = nh \tag{14}$$

Despejando E, llegamos a que

$$E = n\hbar w \tag{15}$$

Que son los posibles valores de energía para la partícula.

También nos piden el espectro de emisión de la partícula. Si consideramos un estado inicial (de mayor energía) n_i y un estado final n_f , entonces cuando el sistema pase de un estado a otro emitirá un fotón con una energía igual a la diferencia entre esos estados, así:

$$E_{fotón} = (n_f - n_i)\hbar w \tag{16}$$

Como la energía del fotón es proporcional a su frecuencia $E_{fotón} = hf$, podemos obtener la frecuencia del fotón emitido como:

$$f = \frac{(n_f - n_i)w}{2\pi} \tag{17}$$

2) A partir de las relaciones de incerteza, prueben que la energía mínima de un oscilador armónico 1D es $E_{min} \approx \frac{\hbar w}{2}$, donde w es su frecuencia. Analicen el resultado.

Sabiendo que la energía de un oscilador armónico se puede escribir como:

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \langle x^2 \rangle \tag{18}$$

Y sabiendo que $w^2 = k/m$, se llega a que

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} \cdot w^2 \cdot m \cdot \langle x^2 \rangle \tag{19}$$

Ahora podemos usar el mínimo de la relación de incertidumbre para la posición y el momento, siendo este $\Delta x \Delta p = \hbar/2$.

Sabemos que

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

y que

$$(\Delta p)^2 = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle$$

Pero como tanto su posición como su momento es igual de positivo que negativo en un periodo, se obtiene que $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$

Por lo tanto, obtenemos que

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle$$

y que

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle$$

Con esto, reemplazamos Δp a partir de la relación de incertidumbre en la ecuación 17 y nos queda:

$$\langle E \rangle = \frac{(\frac{\hbar}{2\Delta x})^2}{2m} + \frac{1}{2} \cdot w^2 \cdot m \cdot (\Delta x)^2 \tag{20}$$

Lo cual nos da la energía del oscilador armónico en función de su posición. Ahora, derivamos respecto a Δx e igualamos a cero para obtener el valor en Δx tal que la energía sea un mínimo. Esto resulta:

$$0 = \frac{-\hbar^2}{4m(\Delta x)^3} + w^2 \cdot m \cdot (\Delta x) \tag{21}$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}} \tag{22}$$

Reemplazando la ecuación 20 en la ecuación 18, obtenemos lo siguiente:

$$E_{min} = \frac{(\frac{\hbar}{2\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}})^2}{2m} + \frac{1}{2} \cdot w^2 \cdot m \cdot (\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}})^2 \tag{23}$$

$$E_{min} = \frac{\hbar w}{4} + \frac{\hbar w}{4} = \frac{\hbar w}{2} \tag{24}$$