Ejercicio F4 Grupo 3

Aquilante J., Catz D., Zacarias J, Murgia M

13 de octubre de 2021

1. Enunciado

Sabiendo que la función trabajo del Cs (cesio) vale $1,9eV$:

(a) Encuentren la frecuencia de umbral y la longitud de onda en el efecto fotoeléctrico.

(b) Determinen la energía cinética máxima de los electrones si la longitud de onda de la luz incidente es 250nm.

(c) ¿Qué longitud de onda tienen los electrones del inciso anterior?

(d) Prueben que un electrón libre no puede absorber un fotón. ¿Qué implica esto?

2. Resolución

2.1. El efecto fotoeléctrico

(a) Si se incide radiación electromagnética sobre la superficie de un metal, es posible liberar electrones. Este fenómeno se conoce como *efecto fotoeléctrico* y fue descubierto en 1887. A fines del siglo XIX se creía que la energía que transportaban las ondas electromagnéticas solo dependía de la intensidad y no de su frecuencia; sin embargo, en los experimentos se observaba que para frecuencias menores a una frecuencia característica del material, no era posible arrancar electrones sin importar cuanto se aumentara la intensidad, lo que a priori no tenía una explicación desde el punto de vista clásico, según el cuál se esperaría que hubiera una intensidad límite que se tenga que superar para observar el efecto fotoeléctrico.

Para explicar este fenómeno, Einstein postuló que la fuente estaba emitiendo partículas con energía dependiente de la frecuencia, actualmente denominadas fotones, que eran absorbidas por un electrón de la superficie, como si fuera un choque plástico. La expresión para la energía de un fotón proviene de la hipótesis de Planck, realizada 5 años antes del postulado de Einstein: una fuente de radiación electromagnética emite una onda cuya energía es

$$E = h\nu \tag{1}$$

donde ν es la frecuencia de la onda electromagnética y h la constante de Planck. Si se están emitiendo fotones cuya frecuencia es menor a la *frecuencia umbral de corte* ν_0, los electrones no estarán recibiendo suficiente energía como para escapar del material.

Cuando el electrón se encuentra en la superficie del material, este debe superar la fuerza atractiva de los núcleos positivos, la cual actúa como una barrera de potencial conocida como función trabajo W; si la energía del fotón supera a la barrera de potencial, el electrón podrá escapar del material. La frecuencia correspondiente a la energía necesaria para superar la barrera potencial W es justamente ν_0, de modo que:

$$W = h\nu_0. \tag{2}$$

En este ejercicio, el dato es que el metal del problema es Cesio y su función trabajo vale 1,9eV. Por lo cual, despejando ν_0 de la ecuación 2, y sabiendo que $h = 4,14 \times 10^{-15} eV.s$, se obtiene:

$$\nu_0 = \frac{W}{h} = \frac{1{,}9eV}{4{,}14 \times 10^{-15} eV.s} \cong 4{,}59 \times 10^{14} Hz \tag{3}$$

Para calcular la longitud de onda umbral λ_0, usamos que las ondas electromagnéticas se desplazan a la velocidad de la luz c, por lo que deben satisfacer la ecuación

$$c = \lambda\nu \tag{4}$$

De aquí se puede despejar la longitud de onda λ_0 asociada a ν_0:

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3 \times 10^8 m/s}{4{,}59 \times 10^{14} hz} \cong 653{,}6nm \tag{5}$$

Esta longitud de onda corresponde al color rojo, que se encuentra en el borde del espectro visible con menor frecuencia, es decir que si incidimos sobre el cesio con luz monocromática de otros colores de mayor frecuencia podremos liberar electrones.

(b) Si la frecuencia de la radiación incidente es mayor que la frecuencia umbral, el electrón no solo escapa del material sino que lo hace con una energía cinética que es distinta de cero. Los electrones que van a tener mayor energía cinética son aquellos que ya se encontraban en la superficie del material, siendo esta:

$$T_{max} = h\nu - W. \tag{6}$$

Esto se debe a que el electrón pierde energía por tener que moverse desde el interior del material hasta la superficie. Nos dan como dato la longitud de onda de la luz incidente $\lambda = 250nm$, la cual corresponde a radiación ultravioleta con frecuencia mucho mayor a la frecuencia umbral para el cesio. Por otro lado, sabemos del inciso anterior que para la luz se cumple la ecuación 4 donde ahora ν será la frecuencia de la luz incidente:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 m/s}{2,5 \times 10^{-7} m} \cong 1,2 \times 10^{15} hz \tag{7}$$

Sabiendo esto, reemplazamos para calcular la energía cinética máxima T_{max} de los electrones:

$$T_{max} = h\nu - W = (4{,}14 \times 10^{-15} eV.s)(1,2 \times 10^{15} Hz) - 1{,}9eV = 3{,}1eV \tag{8}$$

2.2. Ondas de materia - postulado de De Broglie

(c) En el año 1924 Louis De Broglie formuló su hipótesis en la que afirmó que las partículas presentan características tanto ondulatorias como corpusculares, extendiendo este concepto que ya había sido estudiado en las décadas anteriores para las ondas electromagnéticas a la materia. En su postulado relacionó la longitud de onda λ con el impulso lineal p de la partícula y la constante de Planck h, mediante la ecuación:

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{9}$$

Así, si se quiere calcular la longitud de onda λ_e que tienen los electrones del inciso anterior (con energía cinética T_{max}), se puede calcular su impulso lineal p_e mediante:

$$T_{max} = \frac{p_e^2}{2m_e} \Rightarrow p_e = \sqrt{2m_e T_{max}} \tag{10}$$

Conociendo que $1eV = 1{,}602 \times 10^{-19}J$, se sabe que $T_{max} = 3{,}1eV = 4,97 \times 10^{-19}J$. Además, como la masa del electrón es $m_e = 9,11 \times 10^{-31}kg$, se calcula p_e:

$$p_e = \sqrt{2m_e T_{max}} = \sqrt{2(9,11 \times 10^{-31}kg)(4,97 \times 10^{-19}J)} \cong 9{,}5 \times 10^{-25}kg.m/s$$

Finalmente, se puede calcular la longitud de onda de los electrones, con $h = 6{,}63 \times 10^{-34}J.s$:

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}J.s}{9{,}5 \times 10^{-25}kg.m/s} \cong 0,7nm$$

2.3. ¿Es posible que un electrón libre absorba un fotón?

(d) La interacción entre un electrón libre y un fotón, de la misma forma que con el efecto fotoeléctrico, se puede tratar como una colisión; debido a que las energías y velocidades involucradas son bastante grandes, la colisión será relativista, lo que implica que el impulso y energía del sistema se conserva. Planteando dichas conservaciones en un choque plástico con el electrón libre inicialmente en reposo, se va a llegar a una contradicción, demostrando que el electrón no puede absorber al fotón completamente.

Para una partícula con masa en reposo m_0, que se está moviendo con velocidad $\vec{v}$, podemos calcular su impulso lineal $\vec{p}$ y energía cinética T relativista como:

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} \tag{11}$$

$$T = \gamma m_0 c^2 \tag{12}$$

con γ siendo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{13}$$

Eligiendo un sistema de referencia en el que el electrón esta inicialmente en reposo, y planteando que el fotón es totalmente absorbido por el electrón, la conservación del impulso queda

$$\frac{h\nu_o}{c} = \gamma m_0 v_e, \tag{14}$$

donde ν_0 es la frecuencia del fotón de incidencia antes del choque, m_0 es la masa en reposo del electrón y v_e es la velocidad del electrón después del choque; nótese que si el electrón absorbe todo el fotón, la dirección del electrón después del choque es igual a la dirección de incidencia del fotón.

La conservación de la energía queda

$$h\nu_0 + m_0c^2 = \gamma m_0 c^2. \tag{15}$$

Reordenando la ecuación 15, y dividiendo por c, se obtiene

$$\frac{h\nu_0}{c} = (\gamma - 1)m_0 c \tag{16}$$

que se puede igualar a la ecuación 14, tal que

$$(\gamma - 1)c = \gamma v_e. \tag{17}$$

Luego, dividimos ambos lados por γ y reemplazamos su definición 13 en la igualdad, obteniendo

$$\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}\right) c = v_e \tag{18}$$

que se puede reducir a la siguiente igualdad:

$$1 - \frac{v_e}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}. \tag{19}$$

Esta última relación solo se cumple para $v_e = 0$, lo que implicaría que $\nu_0 = 0$ según la conservación del impulso 14. De aquí se deduce que un electrón libre no puede absorber un fotón. Esto se contrasta con el efecto fotoeléctrico, donde se observa que un fotón puede ser absorbido por un electrón siempre y cuando este se encuentre inicialmente ligado a un medio material.