Ejercicios 4,5 y 6

4. Demostrar que si un operador $\hat{F}$ es hermítico, el valor medio de la magnitud física F es real. Definición: decimos que el operador $\hat{F}$ es hermítico si y solo si $\hat{F}^t = \hat{F}^*$, es decir si

$$\int \phi^* \hat{F} \psi = \int \psi \left(\hat{F} \phi\right)^*$$

5. Hallar la expresión del operador $\hat{p}_x$ en la representación de coordenadas y la del operador $\hat{x}$ en la representación de los momentos. Demostrar que son hermíticos.

6. Determinar cuáles de las siguientes funciones son autofunciones del operador $\hat{p}_x$ y del operador $\hat{p}_x^2$:

4 → LO HACEMOS

5 → LO HACEMOS

6 → ¿QUE SIGNIFICA QUE SEA AFUN?

BONUS → SI ESTAMOS COMENTO EL 7.

(4) QUQ SI $\hat{F}$ ES HERMÍTICO $\Rightarrow$ $\langle F \rangle \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \quad F = F^{+} = (F^{*})^{t}$$

$$\langle F \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \psi^{*} \hat{F} \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \psi^{*} \hat{F}^{+} \psi =$$

$$= \int dx\ \psi^{*} (F^{*})^{t} \psi =$$

$$\hat{F}\psi \rightsquigarrow \varphi$$

$$= \int dx\ \psi\ F^{*} \psi^{*} =$$

$$= \left(\int dx\ \psi^{*} F \psi \right)^{*} = \langle F \rangle^{*}$$

$$\langle F \rangle = \langle F \rangle^{*} \Rightarrow \langle F \rangle \in \mathbb{R}$$

OBSERVABLES → SON HERMÍTICOS

(5)

$$\langle p \rangle = \int dp\ \phi^{*}(p)\ p\ \phi(p) = \qquad \text{ARA } p \to p_x$$

$$= \int dp\ \phi^{*}(p)\ p \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{h}} \int dx\ \psi(x)\ e^{-ipx/\hbar} \right]}_{☆} =$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$☆ \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \psi(x)\ e^{-i\frac{px}{\hbar}} = \psi \left(\frac{-\hbar}{ip}\right) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int \left(-\frac{i\hbar}{p}\partial_x \psi\right) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx$$

$$u = \psi \quad du = \partial_x \psi$$
$$dv = e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \quad v = -\frac{\hbar}{ip} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$$

$= 0$ XQ $\psi \underset{x\to\infty}{\to} 0$

$-iPx$

$$= \frac{1}{\sqrt{h}} \int dp\, \phi^* \cancel{p} \int dx \left(-i\frac{\hbar}{\cancel{p}} \partial_x \psi\right) e^{\frac{}{\hbar}} =$$

$$= \int dx \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{h}} \int dp\, \phi\, e^{ipx/\hbar}\right]^*}_{\psi^*} (-i\hbar \partial_x)\psi =$$

$$= \int dx\, \psi^* (-i\hbar \partial_x)\psi \Rightarrow \hat{p}_x = -i\hbar \partial_x$$

$$\underline{\hat{p}} = -i\hbar \underline{\nabla} \leadsto \hat{p}^2 = -\hbar^2 \nabla^2$$

$$\underbrace{E}_{i\partial_t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)$$

Sup $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* (-i\hbar \partial_x)\psi\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\, (i\hbar\, \partial_x)\psi^* =$

$$= i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi\, \partial_x \psi^* =$$

$$= i\hbar \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \partial_x (\psi\psi^*)}_{=0} - \psi^* \partial_x \psi =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* (-i\hbar \partial_x)\psi\, dx$$

⑥ $\underbrace{\hat{F}\psi = f\psi}$ $f \to \langle \hat{F} \rangle$ $\leadsto \Delta f = 0$

F HERMITICO $\langle F \rangle \in \mathbb{R}$ $\hat{F}\psi_1 = f_1 \psi_1$ $\hat{F}\psi_2 = f_2\psi_2$ $\int \psi_1^* \psi\, dx = 0$

⑧ $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ $\hat{H}\psi = E\psi$ $E \to V(x)$